Bažant: Dotvarování a smršťování betonových konstrukcí

Vývoj stavebních konstrukcí spěje, jak ukazují stavby z poslední doby z celého světa, k novým konstrukčním typům, které za cenu složitějšího statického působení umožňují lepší hospodárnost, bezpečnost a mnohdy i odvážnější estetický účinek. Dosahuje se toho novými nebo jen nově propracovanými konstrukčními postupy nebo dokonalejším využitím spolupůsobení různých materiálů, jako u předpjatých konstrukcí, u spřažených konstrukcí a u montovaných staveb. U všech těch se uplatňuje převážně beton spolupůsobící s odlišnými hmotami (např. kabely, lany, táhly, kameným zdivem, základovou zeminou atd.) nebo i s různě starými betonovými konstrukcemi (např. s prefabrikovanými prvky, tedy s prvky lišícími se stářím i teplotou).

Nehomogenita konstrukcí může být příčinou vyrovnání vnitřních sil, sice většinou nepříznivých, ale někdy se projevujících i opačně. U betonových konstrukcí musí být největší pozornost věnována napětím vznikajícím smršťováním a dotvarováním, jejichž výsledkem jsou deformace zpravidla trvalého rázu. Jejich vliv zejména u staticky neurčitých konstrukcí a postupně zatěžovaných nelze neuvažovat, neboť vznikající trvalé deformace jsou podstatné. Jejich účinky se projevují nejen při řešení statistického působení, překročením dovoleného zatížení, zejména při výpočtu podle teorie mezních stavů, ale i při posuzování vodotěsnosti a při opakovaném namáhání.

Řešení těchto problémů jsou předmětem této knihy, v níž autor věnuje největší pozornost užití zobecněného Dischingerova zákona dotvarování betonu, který je nejjednodušším zákonem postačujícím pro řadu praktických úloh. Jsou přesně formulovány jeho výchozí předpoklady. Pro uvažování nehomogenity je zaveden předpoklad afinity dotvarování; pro vliv atmosférických podmínek předpoklad redukce času. Dále jsou sestaveny základní diferenciální rovnice zákona dotvarování při víceosé upjatosti.

Mimo to je ukázáno i řešení v případech přesnějších, zato však složitějších zákonů dotvarování (např. zákon Arutjunjana-Maslova), popř. pro obecnou teorii lineárního dotvarování betonu založenou pouze na principu v čase, kdy místo diferenciálních rovnic je nutno řešit Volterrovy integrální rovnice. Zákony dotvarování jsou interpretovány reologickými modely s časově proměnnými parametry; na jejich základě jsou též odvozeny nové vhodné, přesnější tvary dotvarování. Stručně jsou též uvažovány nelineární efekty v dotvarování betonu.

Pro matematické řešení je odvozena analogie dotvarování s pružností, jež záměnou pružnostních konstant za operátory dotvarování dovoluje odvodit okamžitě rovnice příslušné úlohy při dotvarování z rovnic teorie pružnosti. Je ukázána též možnost užití Laplaceovy transformace pro dotvarování betonu. Dále jsou odvozeny obecné variační principy pro dotvarování betonu – princip minima přetvarného odporu.

Poněvadž přesná řešení složitějších konstrukcí jsou značně pracná, jsou ukázány četné numerické metody řešení, jež jsou vhodné i pro výpočet na samočinných počítačích. Přitom je vždy zároveň objasňován jejich statický význam spočívající v postupných řešeních dané pružné konstrukce, k nimž lze výhodně užít např. i příčinkových čar.

Postup výpočtu je osvětlen na numerických příkladech konkrétních konstrukcí, hlavně mostních.

Bažant

DOTVAROVÁNÍ BETONU PŘI VÝPOČTU KONSTRUKCÍ

SNTL

KNIŽNICE stavební aktuality

Inž. Zdeněk P. Bažant, CSc.

DOTVAROVÁNÍ BETONU PŘI VÝPOČTU KONSTRUKCÍ

Praha 1966

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ TECHNICKÉ LITERATURY

Kniha pojednává o dotvarování a smršťování nehomogenních betonových konstrukcí a o jejich výpočtech. Autor podává ucelenou, obecnou teorii vybudovanou na jednotných základních předpokladech. V knize jsou řešeny četné příklady konstrukcí z prefabrikátů, předpínaných a spřažených a též zavěšených nebo stavěných letmou montáží apod., jakož i příklady vztahu mezi podložím a konstrukcí. Podaná teorie umožňuje dokonalejší návrh a výpočet moderních betonových konstrukcí.

Dílo je určeno projektantům betonových konstrukcí všech oborů a vědeckým pracovníkům ve výzkumných ústavech. Může být i pomůckou k prohloubení znalostí studentů na vysokých školách stavebních.

Lektoroval doc. inž. Lubor Janda, CSc.

Redakce stavební literatury — hlavní redaktor inž. Václav Krůta

© inž. Z. P. Bažant, CSc., 1966

Obsah

1. Úvod 9

2. Předpoklady průběhu dotvarování a smršťování 14
   2.1. Podstata dotvarování a smršťování betonu 14
   2.2. Základní předpoklady. Dischingerův průběh dotvarování 15
   2.3. Součinitel dotvarování. Průběh smršťování 20
   2.4. Příčné a smykové deformace při dotvarování 23
   2.5. Nehomogenita konstrukce. Předpoklad vzájemné afinity dotvarování . . 25
   2.6. Redukce času (Příklad: vyjádření nehomogenity) 30

3. Nehomogenní těleso 32
   3.1. Definice transformovaného tělesa (konstrukce, systému) 32
   3.2. Přetvárné rovnice za složené napjatosti 32
   3.3. Partikulární řešení a ustálená napjatost 34
   3.4. Homogenní těleso (Příklad: válcová nádrž) 36
   3.5. Analogie dotvarování s pružností 39

4. Staticky neurčité konstrukce 43
   4.1. Deformace prutu 44
   4.2. Deformace konstrukce 45
   4.3. Základní statická soustava 46
   4.4. Přetvárné rovnice 47
   4.5. Obecné řešení 49
   4.6. Počáteční podmínky 53
   4.7. Některé vlastnosti řešení a příklady (Příklady jednoduchých konstrukcí: rošt, letmo betonovaný most, visutý most) 55
   4.8. Homogenní konstrukce (Příklad: rám) 62
   4.9. Výpočet deformace konstrukce 64
   4.10. Relaxace napětí při konstantním stavu deformace tělesa 66
   4.11. Zásady při návrhu staticky neurčitých konstrukcí 66

5. Přibližné metody řešení 70
5.1. Integrace rozvojem v mocninnou řadu 70
5.2. Integrace postupnými aproximacemi 71
5.3. Numerická integrace polygonální (Eulerova—Cauchyho) 73
5.4. Numerická integrace Rungeho—Kuttova 76
5.5. Zobecnění přibližných řešení 79
5.6. Převod vnitřní deformace na zatížení 80
5.7. Řešení pomocí příčinkových čar 85
5.8. Řešení metodou deformační, metodou rozvodu deformace a metodou rozdělování momentů (Crossova) 85
5.9. Určení deformace mocninnou řadou 86
5.10. Určení deformace numerickou integrací 87
5.11. Přibližné řešení ideálními přetvárnými moduly 87
5.12. Numerická integrace interpolační (Příklad) 90
5.13. Numerická integrace relaxační 93
5.14. Užití partikulárního řešení 95
5.15. Malá změna počátečních podmínek 96
5.16. Praktické použití jednotlivých metod a výpočet na samočinných počítačích 97
6. Konstrukce s nehomogenními průřezy 101
6.1. Průřez prutu složený z homogenních částí (Příklad: betonové prefabrikáty spřažené s horní deskou) 102
6.2. Spřažený ocelobetonový průřez (Příklad) 112
6.3. Průřez prutu z předpjatého betonu (Příklad) 114
6.4. Spojitě nehomogenní průřez 118
6.5. Deska dvousměrně předpjatá 119
6.6. Deformace prutu s nehomogenními průřezy 120
6.7. Spolupůsobení konstrukce jako celku 124
6.8. Výpočet spolupůsobení přibližnými metodami (Příklad: spřažený ocelobetonový spojitý nosník) 129
6.9. Ohyb železobetonových nosníků 134
7. Variační formulace 137
7.1. Princip minima komplementárního přetvárného odporu 137
7.2. Princip minima celkového přetvárného odporu 142
7.3. Energetické vztahy 142
7.4. Přibližná variační řešení 143
8. Spolupůsobení konstrukcí s podložím 145
8.1. Konečné hodnoty deformace podloží 146
8.2. Spolupůsobení při pružně poddajném podloží 147
8.3. Časový průběh deformace jílu 147
8.4. Porovnání průběhu konzolidace jílu a dotvarování betonu 152
8.5. Výpočet spolupůsobení při dlouhodobém přetváření v konstrukci i v podloží (Příklad: betonový most na jílovém podloží) 153
8.6. Praktické poznámky 162

9. Některé další problémy 163
9.1. Nehomogenní anizotropní konstrukce 163
9.2. Stabilitní problémy 164
10. Rozbor různých teorií pro dotvarování betonu 168
10.1. Některé jednoduché možnosti zpřesnění 168
10.2. Obecnější teorie dotvarování betonu 169
10.3. Reologické modely. Teorie viskoelasticity 174
10.4. Model betonu s ohledem na vliv stárnutí 179
Literatura 183

Rukopis byl odevzdán 28. 3. 1964

1. Úvod

Již při prvých neúspěšných pokusech o předpínání betonu v letech 1888 až 1910 bylo zjištěno, že v betonu vznikají nejen krátkodobé deformace, objevující se prakticky současně se zavedením zatížení, ale též značně velké deformace zpožděné, dlouhodobé, probíhající po mnoho let. Lze rozlišit dvojí druh těchto deformací. Jednak je to objemové smršťování, jež je samovolné a nezávislé na zatížení, jednak dotvarování, které vzniká v závislosti na zatížení. Dotvarování se za běžných hodnot napětí po dlouhé době ustaluje na jisté konečné hodnotě dosahující až několikanásobku okamžité deformace. V oboru napětí vyskytujících se v konstrukcích při pracovním zatížení je dotvarování přibližně přímo úměrné zatížení, dosti dobře pro ně platí princip superpozice a vzniklé deformace jsou z větší části při odtížení nevratné. Charakteristickou vlastností je závislost na fyzikálně chemickém stáří betonu, daném postupem vysýchání a hydratace.

Z hlediska konstrukcí je na vlivu dotvarování podstatné, jaké změny vnitřních sil, popřip. též deformací v konstrukci vyvolává. Je zřejmé, že na vnitřní síly může dotvarování působit pouze u staticky neurčitých systémů, neboť u systémů staticky určitých jsou vnitřní síly plně určeny podmínkami rovnováhy. V dalším rozboru se přesvědčíme, že dotvarování nevyvolává žádné změny vnitřních sil též u většiny „tradičních" staticky neurčitých železobetonových konstrukcí monolitických, takže nepřekvapuje, že po dlouhou dobu užívání betonu nebylo nutno se dotvarováním zabývat.

Vývoj stavebních konstrukcí však spěje k novým konstrukčním typům, které za cenu složitějšího statického působení umožňují dosáhnout vyšší hospodárnosti, bezpečnosti, odvážnosti a estetičnosti. Jednotlivými směry a stupni na této cestě byly stavba oblouků, zavedení předpjatého betonu

a dále spřažené konstrukce, v nichž betonové prvky spolupůsobí s jinými materiály, hlavně s ocelí nebo s betonem jiného stáří, a konečně nemonolitický způsob výstavby, dosahující nejvyššího stupně u montovaných konstrukcí. Praxe i teorie ukázala, že u těchto konstrukcí je vliv dotvarování značný a je nutno jej při návrhu uvažovat.

Příčiny tohoto složitějšího chování konstrukcí „moderních" proti „tradičním" jsou dvě. Jednak jsou to počáteční podmínky zavedení zatížení, jednak nehomogenita konstrukce.

1. Počáteční podmínky jsou dány postupem výstavby. U „tradičních" monolitických konstrukcí bylo obvykle veškeré zatížení zavedeno až na hotové nosné konstrukci. Naproti tomu u konstrukcí montovaných a u mnohých konstrukcí předpjatých, spřažených a postupně betonovaných část zatížení působí již předtím, než je konstrukci dán definitivní statický systém, a vznikají tedy změny statického působení. Dále se dnes často navrhují staticky neurčité systémy, i v případech, při nichž vznikají posuvy podpor. Předpětím nebo rektifikacemi jsou do konstrukce zaváděny počáteční deformace a zatížení. Další vnitřní síly v průběhu působení vznikají vlivem smršťování nebo vlivem tepelných dilatací.

Změnami statického působení vznikají obvykle nepříznivé přesuny vnitřních sil. Nepříznivé jsou též ztráty předpětí a redukce sil zavedených rektifikacemi. Naproti tomu při účincích posuvu podpor, smršťování a tepelných dilatací dotvarování redukuje vnitřní síly, a projevuje se tedy v příznivém smyslu.

2. Značně větší početní komplikace než počáteční podmínky působí nehomogenita četných „moderních" konstrukcí proti „tradičním" (nehledě na nehomogenitu železobetonového průřezu). Je způsobena např. tím, že beton konstrukce je výrazně různého stáří, nebo zejména tím, že v konstrukci spolupůsobí beton a ocel, nebo i tím, že konstrukce spolupůsobí s poddajným podložím ap.

K prvé skupině patří letmo betonované nebo montované mosty, spojité nosníky nebo nosníkové rošty z prefabrikátů, jež jsou např. z výrobních důvodů různě staré, montované konstrukce spolupůsobící s částmi vybetonovanými na staveništi, konstrukce betonované postupně na samonosné výztuži (jako např. oblouky betonované po věncích). Dále sem přísluší i některé konstrukce betonované monoliticky do bednění, jsou-li v betonáži velké časové odstupy (způsobené např. opakovaným použitím bednění nebo skruží), nádrže vetknuté do staršího tuhého základu, přehradní zdi, nosné betonové stěny mezi prefabrikovanými panely ap.

K druhé skupině, vyznačující se nehomogenitou beton—ocel, se řadí spřažené nosníky ocelobetonové, konstrukce z předpjatého betonu, betonové oblouky s táhlem, betonové trámové mosty zavěšené na lanech nebo visuté, železobetonové průřezy ap. K této skupině můžeme počítat i konstrukce, v nichž spolupůsobí betonové a kamenné zdivo, jako je tomu u obkládaných pilířů a zdí.

Ke třetí skupině patří betonové konstrukce na stlačitelném podloží buď pružném, jako je štěrk, písek, skála ap., nebo dlouhodobě konzolidujícím, jako je jíl. Můžeme sem řadit i ocelové konstrukce na jílovém podloží.

Další nehomogenita též vzniká, jestliže spolupůsobí části, které mají různou teplotu (způsobenou např. hydratačním teplem v betonovém masívu) nebo jsou v prostředí s různou vlhkostí (pilíře pod vodou spolupůsobí s trámem nad vodou) anebo mají značně různou tloušťku (beton hlouběji pod povrchem se dotvaruje méně a pomaleji).

Nehomogenita konstrukce způsobuje — obrazně řečeno — přesun vnitřních sil do částí, které se dotvarují méně nebo pomaleji. Např. vnitřní síly se tedy přesouvají do staršího betonu a do tlustších průřezů nebo do ocelových částí. Tyto změny vnitřních sil jsou většinou nepříznivé, ale bylo by možno ukázat i opačné případy (např. přesouvá-li se napětí do prvku, který je při nahodilém zatížení méně využit).

Dotvarování způsobuje často nepříznivé deformace a průhyby, s nimiž je nutno počítat a konstrukci postavit s příslušným nadvýšením (letmo betonované a zavěšené mosty, ploché oblouky a skořepiny aj.).

Závažnost vlivu dotvarování způsobeného nehomogenitou je větší při větším poměru zatížení dlouhodobě působících (stálé zatížení, předpětí) ke krátkodobým nahodilým zatížením. Proto má největší význam u mostů, zastřešení a jiných konstrukcí velkých rozpětí. Se zvětšováním rozpětí moderních konstrukcí jeho význam dnes vzrůstá.

Poznámka: Dotvarování bude mít též význam u konstrukcí z polymerových malt a plastbetonů, jimiž se zde nebudeme zabývat.

Při posouzení konstrukce klasickou metodou se může vliv dotvarování projevit překročením dovoleného namáhání. Z hlediska teorie mezních stavů je rozhodující, jak je dotvarováním ovlivňována bezpečnost konstrukce. Vzhledem ke změnám původních skutečných napětí mění dotvarování bezpečnost proti tvoření trhlin, což souvisí též s korozí a vodotěsností. Dále může dotvarování způsobit značný růst excentricity tlaku u tlačených prutů, stěn, skořepin a oblouků, čímž se snižuje bezpečnost proti porušení ztrátou sta-

bility. Totéž nastává, když dotvarování způsobuje vzrůst tlakové síly. Změnou napětí může být dále ovlivněna bezpečnost při opakovaném namáhání (mez únavy). Druhotně může být změněn i mezní moment únosnosti předpjatého průřezu, způsobí-li takové změny napětí, že se v průřezu poruší dříve beton než ocel nebo naopak, a dále statická pevnostní mez únosnosti konstrukce, pokud změny napětí ovlivní funkci plastických kloubů (maximální možné pootočení). Z hlediska mezních stavů bylo by třeba zabývat se též vlivem dotvarování při vysokých napětích, tj. jeho vlivem na dlouhodobou pevnost ap. V rámci této práce se však můžeme zabývat jen dotvarováním v oboru dovolených hodnot napětí v konstrukcích při pracovním zatížení, tedy v mezích lineární závislosti.

Reologie konstrukcí, jejich viskoelasticita a speciálně i dotvarování betonu je dnes velmi aktuální problém, o čemž mimo jiné svědčí značné množství prací a článků, zvláště z poslední doby. Výtah z této literatury je uveden na konci práce.

Speciální teorie dotvarování pro různé materiály jsou značně rozdílné vzhledem k podstatným rozdílům v jejich chování, takže technické problémy dotvarování betonu, oceli, lehkých slitin, plastických hmot a zemin jsou zkoumány samostatně. Tak např. dotvarování oceli na rozdíl od betonu vzniká pouze za vysokých teplot nebo vysokých napětí, velmi závisí na teplotě a je nelineárně závislé na napětí, naproti tomu je však proti dotvarování betonu jednodušší tím, že nezávisí na stáří materiálu a nezpůsobuje změny objemu. U plastických hmot je podstatným rysem značný podíl vratných deformací, závislost na teplotě a lineární závislost na napětí, u laminátů navíc též anizotropie. Přetváření jílu je proti konstrukčním materiálům jednodušší tím, že se skládá převážně ze zpožděných pružných deformací (konzolidace), avšak složitější zase tím, že závisí podstatně na tloušťce vrstvy a okrajových podmínkách.

Dotvarování betonu se dosud vypočítává v podstatě na podkladě dvou různých teorií. Široké praktické použití však zatím doznala pouze teorie stárnutí, založená na zjednodušujících předpokladech prvně navržených Dischingerem [18] a částečně již Whitneyem [52]. Druhá teorie, teorie obecného lineárního dotvarování, pro beton rozpracovaná zvláště Arutjunjanem [1], vychází z poněkud méně zjednodušujících předpokladů, dokonaleji vystihujících chování betonu hlavně za stálých podmínek prostředí. Jejímu užití v praxi však brání značnější matematická složitost způsobující velké obtíže zvláště u složitějších nehomogenních konstrukcí. Lze proti ní též namítat,

že nelze dosud srovnatelně přesně vyjádřit vlivy proměnlivosti prostředí, rozměrů a tvaru konstrukce ap.

Z úloh dotvarování byly řešeny hlavně různé případy vlivu počátečních podmínek a smršťování za předpokladu homogenity konstrukce a různé případy vlivu nehomogenity u jednodušších staticky neurčitých systémů, jako jsou např. spřažené a předpjaté průřezy, oblouky s táhlem ap. Mezi četnými významnými pracemi uveďme např. [10], [11], [12], [14], [18], [21], [25], [26,] [29], [33], [35a], [39a], [40], [49], [52], [54] aj. v rámci Dischingerových předpokladů nebo [1], [34], [35a], [36] aj. za obecnějších předpokladů. Složitější nehomogenní konstrukce byly zkoumány např. v [17], [19], [25], [34], [49], popř. za obecnějších předpokladů v [1], [35a], [36] aj. Poměrně málo dosud prozkoumaným problémem je stabilita, vzájemný vliv vnitřní nehomogenity různých průřezů v konstrukci (a nehomogenity konstrukce) na její napjatost, spolupůsobení s podložím, obecná nehomogenita tělesa, vliv atmosférických podmínek, různé vlhkosti a teploty, příčných roztažení, a zvláště vliv tvaru a tloušťky konstrukce na nehomogenitu konstrukce. Konečně je to i vliv hydratačního tepla v betonových masívech s ohledem na dotvarování.

Základním cílem každé teorie je obecnost a jednotnost. Porovnáme-li četná dosavadní řešení jednotlivých úloh dotvarování se stavem, jakého dnes dosáhla např. teorie pružnosti a mechanika pružných konstrukcí, zjistíme, že jejich obecnost a jednotnost je menší. Řešení jednotlivých úloh jsou odvozována mnohdy jednotlivě a na sobě nezávisle.

Proto se v této práci pokusíme podat zcela obecné a jednotné řešení vlivu dotvarování a smršťování, které bylo v hlavních rysech odvozeno v autorových pracích [5] až [9]. Jako speciální případy vyplynou pak dosavadní známá řešení dílčích úloh, přičemž se pokusíme řešit i různé dosud neřešené problémy.

Poněvadž řešení je nutno opřít o řadu zjednodušujících předpokladů, je třeba přijímat teoretické výsledky, zvláště u nových úloh a nevyzkoušených konstrukcí, s jistou rezervou.

Experimentální stránkou, měřením na hotových stavbách a jejich zhodnocením, jež je též předmětem četných prací, se v této práci nemůžeme zabývat. Pro další vývoj a řešení uvedených málo prozkoumaných problémů budou však nezbytné rozsáhlé experimenty a měření.

2. Předpoklady o průběhu dotvarování a smršťování

2.1. Podstata dotvarování a smršťování betonu

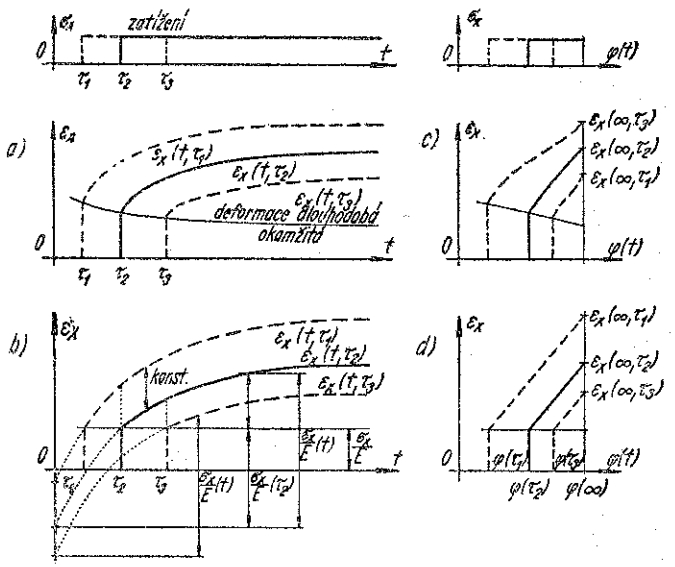
Dotvarováním betonu nazýváme dlouhodobé deformace závislé na napětí a smršťováním rozumíme deformace na napětí a tepelné dilataci nezávislé. Fyzikálně chemická podstata obou jevů je podobná. Je dána viskozními vlastnostmi cementového gelu a změnou struktury cementu tvrdnoucího při hydrataci. V gelu pod zatížením vzniká vazké tečení a napětí se postupně přenáší do krystalické složky cementu, odkud se dále přesouvá na kamenivo. Podíl krystalické složky s postupující hydratací (chemickým stářím) vzrůstá. Současně roste též vazkost gelu a pružnost krystalické složky, což dohromady zpomaluje dotvarování. Objem cementového gelu se s časem zmenšuje. Kromě úbytku vody hydratací se přebytečná voda též vypařuje, beton vysychá (fyzikální stárnutí) a vznikají kapilární jevy, při nichž povrchové napětí v kapilárách stlačuje beton podobně jako u jílu při vysýchání [33], [32]. Dotvarování se projevuje růstem deformace (obr. 2.1), který se postupně se stárnutím betonu zpomaluje a dosahuje pro napětí menší než asi 0,8 meze pevnosti za dobu asi 5 až 30 let jisté konečné hodnoty (obr. 2.5). Tato hodnota bývá pro napětí menší než asi 0,4 až 0,5 meze pevnosti zhruba 1 až 5krát větší než pružná deformace. Podobně s časem probíhá i objemové smršťování, jež po několika letech dosáhne konečného zkrácení asi 0,2 až 0,5 mm/m.

Velikost dotvarování a smršťování betonu a jeho průběh závisí na mnoha činitelích. Jsou to: zrnitost písku a štěrku, tvar zrn a jejich mineralogické složení, obsah a jakost cementu, vodní součinitel, stupeň zhutnění, způsob výroby, vlhkost a teplota prostředí, úprava povrchu (izolace), rozměry a tvar konstrukce a stáří betonu. U železového betonu je to též stupeň a způsob

vyztužení. Na dotvarování mají dále vliv napětí a deformace v daném čase a jejich předcházející časový průběh [33], [32], [54]. Přes četné zkoušky jsou představy o těchto jevech dosti neúplné a nejasné, takže je na místě užívat jen jednoduché předpoklady a podstatnější závislosti.

2.2. Základní předpoklady. Dischingerův průběh dotvarování[1])

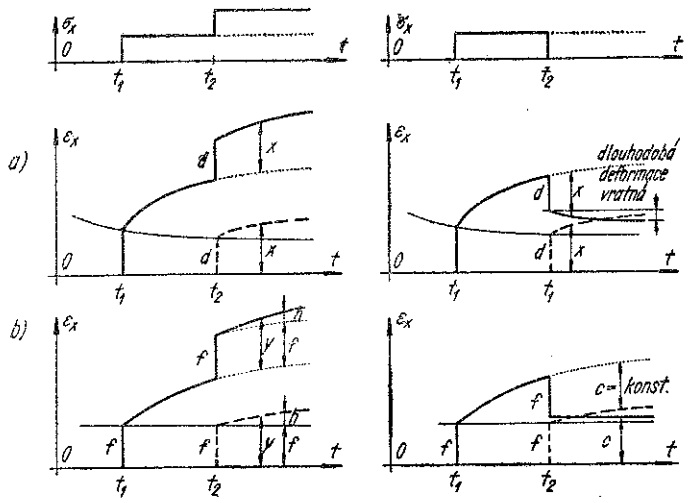
Podle rychlosti a vratnosti deformací lze rozlišit čtyři základní typy deformací závislých na napětí. Jsou to deformace: 1. krátkodobé vratné (okamžité pružné), 2. krátkodobé nevratné (trvalé, plastické), 3. dlouhodobé vratné (zpožděné pružné), 4. dlouhodobé nevratné (zpožděné plastické). Dotvarováním (creep, polzučest', Kriechen, fluage, pelzanie) budeme rozumět veškeré dlouhodobé deformace závislé na napětí. Terminologie není jednotná. Někteří autoři označují dotvarováním jen dlouhodobé nevratné deformace, jinak někdy zvané též plouživost, bez deformací dlouhodobých vratných, nazývaných dopružování. Někdy se místo názvu dotvarování užívá pro beton



Obr. 2.1. **Průběh deformace betonu za stálé vlhkosti a teploty při konstantním zatížení** a) skutečný průběh, b) podle Dischingerova předpokladu, c) d) totéž v proměnné $\varphi(t)$

[1]) Viz poznámka pod čarou na str. 168

též název dotlačování, čímž se má zdůraznit odlišnost od chování kovů. Kov mění převážně tvar, kdežto beton mění hlavně objem, přičemž se může jednat pouze o stlačení. Beton budeme uvažovat jako materiál izotropní (quasiizotropní).

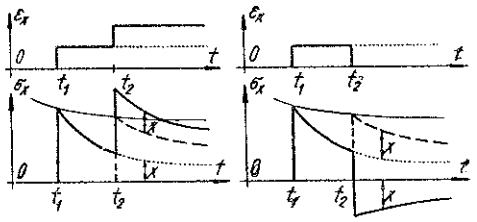


Obr. 2.2. Užití principu superpozice pro konstantní přitížení a pro úplné odlehčení a) obecně, b) za Dischingerova průběhu

Úplné početní vyjádření závislosti deformace a napětí (obr. 2.1a) je velmi složité. Za základ přijmeme tyto zjednodušující předpoklady:

1. Pro veškerá i různoosá napětí a vynucené deformace i jejich časové průběhy platí princip superpozice (obr. 2.2, 2.3).

2. Veškeré dlouhodobé deformace lze přibližně uvažovat jako nevratné (obr. 2.2b vpravo).



Obr. 2.3. Užití principu superpozice pro konstantní vynucené deformace (obráceně)

3. Proměnu konstant pružnosti při stárnutí betonu lze zanedbat.

Prvý předpoklad (v reologii zvaný též zákon Boltzmannův) vymezuje obecnou teorii lineárního dotvarování (odst. 10.2). Má tento význam: Jestliže

průběhu napětí $\sigma(t)$ (stavu napjatosti) v závislosti na čase t odpovídá průběh deformace $\varepsilon(t)$ (stavu deformace) a zároveň průběhu $\sigma^*(t)$ odpovídá $\varepsilon^*(t)$, pak průběhu napětí $\sigma(t) + \sigma^*(t)$ odpovídá průběh deformace $\varepsilon(t) + \varepsilon^*(t)$ a naopak. Totéž platí i pro náhlé změny napětí a deformace. Dále odtud plyne, že průběhu napětí $k \,.\, \sigma(t)$ odpovídá deformace $k \,.\, \varepsilon(t)$. Závislost napětí a deformace je tedy lineární. Z krátkodobých deformací jsou uvažovány pouze deformace lineární vratné (pružné).

Druhý předpoklad znamená, že danému napětí $\sigma(t)$, jež je od jistého času nulové, odpovídá, počínaje tímto časem, deformace $\varepsilon = \text{konst}$ pro libovolný předchozí průběh $\sigma(t)$. Jednoduchou úvahou podle obr. 2.2b pak plyne, že křivky průběhu dotvarování při konstantním napětí zavedeném v různém čase musí být shodné a navzájem posunuté ve směru osy ε.

Podle třetího předpokladu můžeme pak při jednoosé napjatosti průběh celkového poměrného zkrácení $\varepsilon_x(t)$ (znaménko —) ve směru osy x, vyvolaného konstantním normálním napětím σ_x ve směru osy x zavedeným v čase τ od zatvrdnutí betonu, vyjádřit vztahem (obr. 2.1b)

$$\varepsilon_x(t, \tau) = \frac{\sigma_x(\tau)}{E}[1 + \varphi(t) - \varphi(\tau)]. \tag{2.1}$$

Tuto rovnici zavedl Dischinger [18] a Whitney [52]. Dischinger ji poprve rozsáhleji použil k řešení konstrukcí. (Tato teorie sa nazývá Dischingerova nebo též teorie stárnutí.)

Deformace je funkcí napětí σ_x, času t a času τ. Funkce $\varphi(t)$ vyjadřuje průběh dlouhodobé (zpožděné) nevratné (trvalé, plastické) deformace za stálého napětí v poměru k deformacím krátkodobým pružným a nazývá se součinitel dotvarování [zpřesněnou definici viz (2.9)]. Vzhledem k linearitě nezávisí na napětí.

Podle principu superpozice pro zatížení zavedená v různých časech lze z rov. (2.1) určit průběh deformace při proměnném napětí. Sečtením deformací od přírůstků $\mathrm{d}\sigma_x = (\partial\sigma_x/\partial t)\,\mathrm{d}t$ proměnného napětí $\sigma_x(t)$ obdržíme

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t_0)}{E}[1 + \varphi(t) - \varphi(\tau)] + \frac{1}{E}\int_{t_0}^{t} \frac{\partial\sigma_x(\tau)}{\partial\tau}[1 + \varphi(t) - \varphi(\tau)]\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.2}$$

kde $\sigma_x(t_0)$ značí počáteční napětí a t_0 okamžik jeho zavedení. Integrací per partes plyne

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E} + \frac{1}{E}\int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau)\frac{\mathrm{d}\varphi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.3}$$

Funkci $\varphi(t)$ lze považovat za nezávisle proměnnou místo proměnné t, neboť je jednoznačná, spojitá a stále rostoucí. Potom lze psát

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E} + \frac{1}{E}\int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau)\, \mathrm{d}\varphi(\tau). \tag{2.4}$$

Derivováním podle φ obdržíme základní diferenciální rovnici přetváření (pro spojitý průběh ε_x, popř. σ_x)

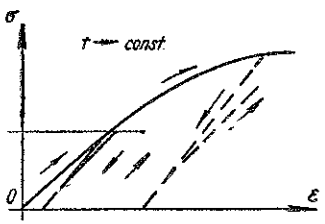
$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi} = \frac{1}{E}\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varphi} + \frac{1}{E}\sigma_x. \tag{2.5}$$

Z rovnice je vidět, že za Dischingerova předpokladu přírůstek deformace $\mathrm{d}\varepsilon_x(t)$ nezávisí na stáří betonu při zavedení předchozích přírůstků $\mathrm{d}\sigma_x(t)$ napětí $\sigma_x(t)$, tj. na průběhu $\sigma_x(\tau)$ pro $\tau < t$.

Při daném průběhu $\varepsilon_x(t)$ představuje rov. (2.5) lineární diferenciální rovnici 1. řádu s konstantními koeficienty pro $\sigma_x(t)$.

Výhodou Dischingerova průběhu dotvarování je to, že je jednoduchý, vyjadřuje dobře stárnutí betonu a umožňuje prakticky použitelné řešení složitých konstrukcí. Jeho přijatelnost potvrzuje i dosavadní praxe projektování.

Skutečné chování betonu je však složitější, neboť za stálé vlhkosti a teploty a při stejných rozměrech a stejném tvaru zkušebních těles se liší od výchozích předpokladů ve stručnosti v těchto směrech:



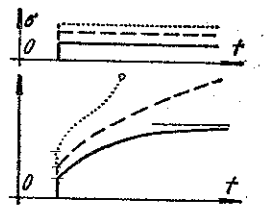
Obr. 2. 4. Krátkodobé deformace

a) Princip superpozice a linearita deformací krátkodobých i dlouhodobých při zatížení libovolně rostoucím nebo málo klesajícím je dobře splněna při napětích menších než asi 0,4 až 0,5 pevnosti v tlaku (—) (obr. 2.4 a 2.5). Těmto mezím skutečné hodnoty napětí v konstrukcích téměř vždy vyhovují. (Odchylky se též objevují při dotvarování za tahu (+), jsou však zanedbatelné vzhledem k malým hodnotám přípustných tahových napětí.) Nelinearita se však objevuje i v uvedeném oboru, a to při střídání přitěžování a odlehčování, neboť pro odlehčování platí větší modul než pro přitěžování (obr. 2.4). Vzniká to hlavně při prvém zatížení; pro napětí 0,2, popř. 0,5 meze pevnosti asi 12, popř. 10 % deformace je nevratné. Po několika cyklech se moduly již shodují [33], [32]. Uvedené odchylky jsou však malé a lze je zanedbat, zvláště jsou-li změny napětí vůči celkové jeho hodnotě malé.

b) Po odlehčení se u betonu objevují též menší dlouhodobé vratné deformace (označované též jako dopružování, zpožděná pružnost, zotavování, paměťové jevy, zděděné deformace), tj. část deformace od předchozího dotvarování se postupně vrací zpět (obr. 2.2a vpravo). Kdybychom tyto deformace početně uvažovali, nebylo by možno přetváření vyjádřit rovnicí tvaru (2.5). Největší odchylka vzniká při velkém odlehčení, kdy celková deformace klesá, ačkoliv podle (2.5) by měla dále vzrůstat nebo při úplném odlehčení zůstávat konstantní. Při úplném odlehčení dosahuje vratná deformace max. $^1/_{10}$ až $^1/_5$ pružné deformace [33], [54], při částečném odlehčení méně. Průběh vratných deformací je rychlejší než u nevratných a dozívá asi za 30 až 50 dní [33]. Nevznikají-li větší odlehčení, jako je tomu při stálém zatížení konstrukce, lze vratné deformace zanedbat a zahrnout je v průměru (pro konstantní napětí) do $\varphi(t)$.

Jistý paradox se objevuje u velmi starého betonu ($t \to \infty$), u nějž též existuje jisté menší dotvarování a relaxace napětí, ačkoliv by podle rovnice (2.5) mělo být nulové. Tento nesouhlas dále přibližně odstraníme definicí součinitele dotvarování podle rovnice (2.9).

c) Modul pružnosti s časem vzrůstá [$E = E(t)$], což způsobuje, že menší část krátkodobé vratné deformace je po čase nevratná. Vzrůst je velký hlavně v prvém měsíci po zatvrdnutí, kdy však obvykle konstrukce ještě plně nespolupůsobí, takže se vliv dotvarování na rozdělení napětí neuplatňuje. Od 28 dnů do ∞ činí vzrůst asi jen 5 až 15 % [33], [32] a jeho průběh je přibližně afinní s křivkou $\varphi(t)$ a též s růstem pevnosti. Proměnu modulu pružnosti E lze zanedbat proto, že jeho vzrůst v pozdější době je malý, přičemž i změny napětí jsou vůči celkové hodnotě napětí malé.



Obr. 2.5. Dotvarování při nízkém, popř. vysokém napětí (vede na konečnou hodnotu, popř. k porušení)

Hlavním nedostatkem Dischingerova průběhu dotvarování je to, že poměrné dotvarování pro změny napětí na velmi starém betonu se blíží k nule, ačkoliv by se mělo blížit k jisté konstantní hodnotě. To způsobuje, že časové poklesy napětí bývají obvykle přeceňovány (a deformace při vzpěru podceňovány). Celkově můžeme říci, že Dischingerova teorie se proto hodí pouze tehdy, kdy zatížení je zavedeno na betonu mladším než asi 1 rok, což jistě představuje většinu případů. Naproti tomu u druhé jednoduché technické teorie, užívající ideální přetvárný modul, se v podstatě předpokládá, že

poměrné dotvarování pro změny napětí na velmi starém betonu je stejné jako na počátku, což je obvykle značně více vzdáleno skutečnosti než prvý případ a je vhodné pouze pro zatížení zavedené na betonu starším než asi 1 rok. (Nejsprávnější je kompromis mezi oběma předpoklady, jenž však vede na složitější rovnice — odst. 10.2.)

Poznámka: V našich úvahách jsme vyšli z křivek dotvarování, tj. z křivek průběhu deformace při daném napětí. Místo toho lze ekvivalentně vyjít též z křivek $\sigma = \sigma(t)$ při dané vynucené deformaci ε, jež se nazývají křivkami relaxace (obr. 2.3), a odvodit z nich rov. (2.5.) Dále se dotvarování, zvláště nelineární dotvarování kovů, zobrazuje tzv. izochronami (obr. 10.4). Jsou to křivky závislosti σ na ε, popř. ε na σ v různých časech $t_1, t_2, \ldots$ pro $\sigma(t) = \text{konst.}$ popř. $\varepsilon(t) = \text{konst.}$ Lépe znázorňují závislost σ a ε u krátkodobé deformace a při nelinearitě. U betonu tyto křivky nejsou tak vhodné (vyjma krátkodobý pracovní diagram, $\partial\sigma/\partial t \to \infty$, obr. 2.4), neboť vystupuje i další parametr — stáří, takže pro různé doby τ zavedení napětí platí různé obrazce izochron.

2.3. Součinitel dotvarování. Průběh smršťování

Součinitel dotvarování $\varphi(t)$ je spojitá rostoucí funkce času s počáteční hodnotou $\varphi(0) = 0$, která ve vymezeném oboru linearity má pro $t \to \infty$ konečnou limitu $\varphi(\infty)$. Zavádí se pro případ časově neměnné vlhkosti a teploty.

Průběh $\varphi(t)$ byl dříve definován a také určován měřením jako časový průběh deformace konstantně zatíženého prvku. Pro vyrovnání výsledků zkoušek však volili různí badatelé různé křivky. Norma ČSN 73 2004 předepisuje výraz

$$\varphi(t) = \varphi(\infty)\sqrt{1 - e^{-\sqrt{t}}} \tag{2.6}$$

zavedený Mörschem, v němž t značí stáří betonu v rocích. (Tabulka funkce je uvedena v normě; pro 1 měsíc $\varphi(t)/\varphi(\infty)$ je 0,50, pro 6 měsíců 0,71, pro 1 rok 0,79.) Dischinger v [18] zavedl výraz

$$\varphi(t) = \varphi(\infty)\,(1 - e^{-t}), \tag{2.7}$$

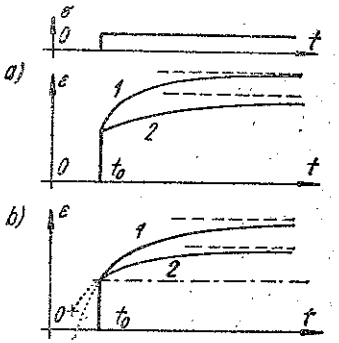
který je dosud používán hlavně pro svou jednoduchost (zvláště v Německu). Obecnější funkcí stejného typu je funkce

$$\varphi(t) = \varphi(\infty)\,(1 - e^{-bt}) \tag{2.8}$$

s konstantou b, jež je početně prakticky stejně výhodná jako (2.7). Od křivky (2.6) by se tato funkce nejméně lišila pro $b = 1{,}6$ až $2{,}0\ \text{rok}^{-1}$. Někdy se užívají i jiné druhy funkcí, např. $\varphi(t) = \varphi(\infty)\,t^b/(a + t^b)$, kde $a = 0{,}28\sqrt{\text{rok}}$, $b = 0{,}5$.

Není příliš důležité, jaká funkce $\varphi(t)$ se pro výpočet použije, neboť již samo její zavedení (předpoklad 1, 2, 3) je pro přetváření betonu jen přibližné. Přitom je nutno uvážit, že tvar funkce $\varphi(t)$ u homogenní konstrukce nemá na výsledky žádný vliv a u konstrukce nehomogenní pak vliv pouze druhotný, způsobený nehomogenitou a případnou časovou proměnou zatížení. Z hlediska početní jednoduchosti (odst. 2.5) je nejvhodnější funkce (2.8).

Součinitelem $\varphi(\infty)$ se vyjadřují podle ČSN 73 2004 průměrné atmosférické podmínky prostředí, zvláště vlhkost (obr. 2.6). Jeho hodnoty jsou předepsány takto: 5 pro suchý vzduch, 4 pro volné prostranství, 3 pro velmi vlhký vzduch a 2 pro uložení ve vodě (ve vodě může být až 0).



Obr. 2.6. Dotvarování při větší (1) nebo menší (2) vlhkosti prostředí nebo tloušťce betonu

Definice funkce $\varphi(t)$ jakožto průběhu deformace prvku zatíženého v čase $t = 0$ odpovídá sice přesně výchozí rovnici (2.1), avšak z hlediska optimálního vystižení skutečnosti v rámci předpokladů 1 až 3 není nejvhodnější. Výhodnější je zavést funkci $\varphi(t)$ různě podle toho, při jakém stáří betonu konstrukce začala spolupůsobit, což přinese zpřesnění díky tomu, že zatížení konstrukcí většinou bývá s časem jen málo proměnné a napětí se tudíž mění také málo. (Při velkých změnách zatížení však tento způsob zpřesnění nepřinese.) Součinitel dotvarování se pak definuje vztahem

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \bar{\varphi}_\infty \beta, \tag{2.9}$$

kde t_0 je počátek spolupůsobení konstrukce pro dané stálé zatížení a $\bar{\varphi}_\infty$ je součinitel dotvarování od času t_0 do ∞, který se experimentálně určuje jako poměrná deformace od času t_0 do ∞ prvků zatížených stálým zatížením při různých stářích betonu t_0; $\bar{\varphi}_\infty = \bar{\varphi}_\infty(t_0)$. Součinitel β je funkcí doby působení stálého zatížení $t - t_0$, $\beta = \beta(t - t_0)$, $\beta(0) = 0$, $\beta(\infty) = 1$ (časové průběhy deformace pro různá t_0 jsou zaváděny jako afinní). Tento způsob zavedení součinitele dotvarování odstraňuje zmíněný paradox u velmi starého betonu, protože lze předepsat nenulové $\bar{\varphi}_\infty$. Přesně matematicky vzato je zde součinitel dotvarování funkcí dvou proměnných t_0 a t a nikoliv pouze rozdílem dvou funkcí jedné proměnné. (K přesnému matematickému smyslu viz rov. (10.7b).

Hodnoty $\overline{\varphi}_\infty$ udává Ulickij [50], [36] ve tvaru

$$\overline{\varphi}_\infty = \varphi^c k_1 k_2 k_3(t_0), \tag{2.9a}$$

kde hodnoty φ^c vyjadřují druh betonu; pro obyčejný beton v přírodě je $\varphi^c = 1{,}8$, pro propařovaný beton 1,5, lehký beton a pískový beton v přírodě 2,0, autoklávový beton 1,5 aj. (závislost na složení betonu viz též [33]). Hodnoty $k_3(t_0)$ jsou pro $t_0 = 3$ dny 2,0, pro 7 dní 1,6, pro 14 dní 1,2, pro 28 dní 1,0, pro 2 měsíce 0,7, pro 3 měsíce 0,6, pro 6 měsíců 0,5, 1 rok 0,4. Koeficient k_1 vyjadřuje průměrnou vlhkost prostředí; pro prostředí velmi suché činí (< 20 %) 1,5, pro suché (20 až 50 %) 1,3, pro normální (50 až 60 %) 1,0, pro vlhké (60 až 75 %) 0,7, pro mokré (> 75 %) 0,5. Koeficient k_2 vyjadřuje vliv různé tloušťky průřezů na průměrné dotvarování (střední tloušťka průřezu); pro tloušťku průřezu 5 cm je 1,40, pro 10 cm 1,15, pro 20 cm 1,0, pro 40 cm 0,80, 80 cm 0,55, přes 100 cm 0,40. (Dále byl např. zjištěn vliv tvaru průřezu [36]; pro hranol 7×7 cm $\overline{\varphi}_\infty$ činí 0,6 z hodnoty pro desku tloušťky 7 cm.)

Sovětská norma (a chystaná ČSN podle mezních stavů) udává pro určení ztrát předpětí konečnou hodnotu $\overline{\varphi}_\infty$ mladého betonu pro t_0 větší než asi 7 dní ve tvaru $\overline{\varphi}_\infty = R_b^{28}/R_b(t_0)$, kde R_b^{28} je pevnost betonu a $R_b(t_0)$ je pevnost v počátečním čase t_0 (pro mladý beton jsou tyto hodnoty značně menší než podle dosavadní ČSN). Pro vyjádření vlivu vlhkosti a tloušťky by bylo třeba uvažovat $\overline{\varphi}_\infty = k_1 k_2 R_b^{28}/R_b(t_0)$. Závislost na pevnosti betonu, zjištěné po 28 dnech zkouškou, je zavedena též v normě DIN.

Pro výpočet konečných účinků dotvarování není vůbec třeba při vzorci (2.9) znát průběh funkce β [je to však nutné při přesném řešení podle (10.8b)]. Pro stanovení hodnot v mezilehlých časech je podle sovětské normy $\beta = 3/[3 + a/(t - t_0)]$, kde $a = 100$ dní. Někdy se též užívá vztah $\beta = \operatorname{tgh}[a(t - t_0)]^b$, kde $a = 0{,}5$ rok^{-1}, $b = 0{,}5$ [27a]. Z matematického hlediska (odst. 10.2) by však pro β byla vhodná jedině exponenciální funkce tvaru

$$\beta = 1 - \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau_b}, \tag{2.9b}$$

která se uvedené hyperbolické funkci nejlépe blíží pro $\tau_b = 50$ až 60 dní.

Vliv různé tloušťky průřezů, vlhkosti prostředí, izolace povrchu a teploty na rychlost průběhu dotvarování, tj. na veličinu b v rov. (2.8) nebo na veličinu τ_b v rov. (2.9b), je dosud málo prozkoumán a neuvažuje se, stejně jako různost dotvarování (i smršťování) v závislosti na poloze uvažovaného bodu v průřezu (vzdálenost od povrchu), která způsobuje přídavná, po průřezu nepřímkově

rozdělená napětí [26a] a jistý rozdíl v dotvarování průřezu jako celku při namáhání centrickým a excentrickým tlakem (s ohybem).

Smršťováním betonu vzniká všemi směry stejné poměrné zkrácení $\varepsilon_{sm}(t)$ nezávislé na napětí a na tepelné roztažnosti. Hodnoty $\varepsilon_{sm}(\infty)$ jsou konečné a závisí na různých vlivech. Vliv průměrných atmosférických podmínek vyjadřuje ČSN takto: pro volné prostranství je $\varepsilon_{sm}(\infty) = -4 \cdot 10^{-4}$, pro suché prostředí $-3 \cdot 10^{-4}$, pro velmi vlhké prostředí $-2 \cdot 10^{-4}$, ve vodě 0 (podle jiných údajů až nabývání $1 \cdot 10^{-4}$). U železového betonu je smršťování poněkud menší s ohledem na vliv silnější výztuže.

Napětí vyvolaná smršťováním jsou redukována dotvarováním. U železobetonových konstrukcí monolitických se pro přibližný výpočet napětí od vynucené deformace podle teorie pružnosti předepisuje hodnota $-1{,}8 \cdot 10^{-4}$, ekvivalentní ochlazení o 15 °C, jež v sobě zahrnuje již přibližně redukci účinků smršťování dotvarováním.

Přibližně lze předpokládat ([18], ČSN, DIN) průběh $\varepsilon_{sm}(t)$ jako úměrný $\varphi(t)$, tj.

$$\varepsilon_{sm}(t) = \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\,\varphi(t), \tag{2.10}$$

což zjednodušuje další řešení.

Ulickij [50], [36] vyjadřuje smršťování ve tvaru

$$\varepsilon_{sm}(\infty) - \varepsilon_{sm}(t) = \varepsilon_{sm}^c k_1 k_2 k_4(t), \tag{2.10a}$$

kde k_1 a k_2 je stejné jako ve (2.9). Hodnoty ε_{sm}^c se liší podle druhu betonu; pro obyčejný beton v přírodě $-2{,}5 \cdot 10^{-4}$, pro beton propařovaný $-2{,}0 \cdot 10^{-4}$, lehký, popř. pískový beton v přírodě $-3{,}0 \cdot 10^{-4}$, popř. $-4{,}0 \cdot 10^{-4}$, autoklávový beton $-1{,}5 \cdot 10^{-4}$ atd. Hodnoty $k_4(t)$ jsou pro $t = 3$ dny 1,0, pro 7 dní 0,9, 14 dní 0,7, 28 dní 0,5, 2 měsíce 0,3, 3 měsíce 0,2, 6 měsíců 0,15, 1 rok 0,1. Podle této závislosti vidíme, že od průběhu úměrného k dotvarování jsou jisté odchylky a že průběh smršťování je rychlejší.

2.4. Příčné a smykové deformace při dotvarování

Podobně jako u pružných deformací vznikají i při dotvarování betonu příčná roztažení, kolmá na směr působícího tlaku. I když v tomto směru bylo dosud vykonáno jen velmi málo zkoušek, lze říci [33], [1], že pro dlouhodobé deformace je poměr rychlosti příčného roztažení ε_y k rychlosti podélného

Hodnoty $\overline{\varphi}_\infty$ udává Ulickij [50], [36] ve tvaru

$$\overline{\varphi}_\infty = \varphi^c k_1 k_2 k_3(t_0), \tag{2.9a}$$

kde hodnoty φ^c vyjadřují druh betonu; pro obyčejný beton v přírodě je $\varphi^c = 1{,}8$, pro propařovaný beton 1,5, lehký beton a pískový beton v přírodě 2,0, autoklávový beton 1,5 aj. (závislost na složení betonu viz též [33]). Hodnoty $k_3(t_0)$ jsou pro $t_0 = 3$ dny 2,0, pro 7 dní 1,6, pro 14 dní 1,2, pro 28 dní 1,0, pro 2 měsíce 0,7, pro 3 měsíce 0,6, pro 6 měsíců 0,5, 1 rok 0,4. Koeficient k_1 vyjadřuje průměrnou vlhkost prostředí; pro prostředí velmi suché činí (< 20 %) 1,5, pro suché (20 až 50 %) 1,3, pro normální (50 až 60 %) 1,0, pro vlhké (60 až 75 %) 0,7, pro mokré (> 75 %) 0,5. Koeficient k_2 vyjadřuje vliv různé tloušťky průřezů na průměrné dotvarování (střední tloušťka průřezu); pro tloušťku průřezu 5 cm je 1,40, pro 10 cm 1,15, pro 20 cm 1,0, pro 40 cm 0,80, 80 cm 0,55, přes 100 cm 0,40. (Dále byl např. zjištěn vliv tvaru průřezu [36]; pro hranol 7×7 cm $\overline{\varphi}_\infty$ činí 0,6 z hodnoty pro desku tloušťky 7 cm.)

Sovětská norma (a chystaná ČSN podle mezních stavů) udává pro určení ztrát předpětí konečnou hodnotu $\overline{\varphi}_\infty$ mladého betonu pro t_0 větší než asi 7 dní ve tvaru $\overline{\varphi}_\infty = R_b^{28}/R_b(t_0)$, kde R_b^{28} je pevnost betonu a $R_b(t_0)$ je pevnost v počátečním čase t_0 (pro mladý beton jsou tyto hodnoty značně menší než podle dosavadní ČSN). Pro vyjádření vlivu vlhkosti a tloušťky by bylo třeba uvažovat $\overline{\varphi}_\infty = k_1 k_2 R_b^{28}/R_b(t_0)$. Závislost na pevnosti betonu, zjištěné po 28 dnech zkouškou, je zavedena též v normě DIN.

Pro výpočet konečných účinků dotvarování není vůbec třeba při vzorci (2.9) znát průběh funkce β [je to však nutné při přesném řešení podle (10.8b)]. Pro stanovení hodnot v mezilehlých časech je podle sovětské normy $\beta = 3/[3 + a/(t - t_0)]$, kde $a = 100$ dní. Někdy se též užívá vztah $\beta = \operatorname{tgh}[a(t - t_0)]^b$, kde $a = 0{,}5\ \text{rok}^{-1}$, $b = 0{,}5$ [27a]. Z matematického hlediska (odst. 10.2) by však pro β byla vhodná jedině exponenciální funkce tvaru

$$\beta = 1 - \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau_b}, \tag{2.9b}$$

která se uvedené hyperbolické funkci nejlépe blíží pro $\tau_b = 50$ až 60 dní.

Vliv různé tloušťky průřezů, vlhkosti prostředí, izolace povrchu a teploty na rychlost průběhu dotvarování, tj. na veličinu b v rov. (2.8) nebo na veličinu τ_b v rov. (2.9b), je dosud málo prozkoumán a neuvažuje se, stejně jako různost dotvarování (i smršťování) v závislosti na poloze uvažovaného bodu v průřezu (vzdálenost od povrchu), která způsobuje přídavná, po průřezu nepřímkově

rozdělená napětí [26a] a jistý rozdíl v dotvarování průřezu jako celku při namáhání centrickým a excentrickým tlakem (s ohybem).

Smršťováním betonu vzniká všemi směry stejné poměrné zkrácení $\varepsilon_{sm}(t)$ nezávislé na napětí a na tepelné roztažnosti. Hodnoty $\varepsilon_{sm}(\infty)$ jsou konečné a závisí na různých vlivech. Vliv průměrných atmosférických podmínek vyjadřuje ČSN takto: pro volné prostranství je $\varepsilon_{sm}(\infty) = -4 \cdot 10^{-4}$, pro suché prostředí $-3 \cdot 10^{-4}$, pro velmi vlhké prostředí $-2 \cdot 10^{-4}$, ve vodě 0 (podle jiných údajů až nabývání $1 \cdot 10^{-4}$). U železového betonu je smršťování poněkud menší s ohledem na vliv silnější výztuže.

Napětí vyvolaná smršťováním jsou redukována dotvarováním. U železobetonových konstrukcí monolitických se pro přibližný výpočet napětí od vynucené deformace podle teorie pružnosti předepisuje hodnota $-1{,}8 \cdot 10^{-4}$, ekvivalentní ochlazení o 15 °C, jež v sobě zahrnuje již přibližně redukci účinků smršťování dotvarováním.

Přibližně lze předpokládat ([18], ČSN, DIN) průběh $\varepsilon_{sm}(t)$ jako úměrný $\varphi(t)$, tj.

$$\varepsilon_{sm}(t) = \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\,\varphi(t), \tag{2.10}$$

což zjednodušuje další řešení.

Ulickij [50], [36] vyjadřuje smršťování ve tvaru

$$\varepsilon_{sm}(\infty) - \varepsilon_{sm}(t) = \varepsilon_{sm}^c k_1 k_2 k_4(t), \tag{2.10a}$$

kde k_1 a k_2 je stejné jako ve (2.9). Hodnoty ε_{sm}^c se liší podle druhu betonu; pro obyčejný beton v přírodě $-2{,}5 \cdot 10^{-4}$, pro beton propařovaný $-2{,}0 \cdot 10^{-4}$, lehký, popř. pískový beton v přírodě $-3{,}0 \cdot 10^{-4}$, popř. $-4{,}0 \cdot 10^{-4}$, autoklávový beton $-1{,}5 \cdot 10^{-4}$ atd. Hodnoty $k_4(t)$ jsou pro $t = 3$ dny 1,0, pro 7 dní 0,9, 14 dní 0,7, 28 dní 0,5, 2 měsíce 0,3, 3 měsíce 0,2, 6 měsíců 0,15, 1 rok 0,1. Podle této závislosti vidíme, že od průběhu úměrného k dotvarování jsou jisté odchylky a že průběh smršťování je rychlejší.

2.4. Příčné a smykové deformace při dotvarování

Podobně jako u pružných deformací vznikají i při dotvarování betonu příčná roztažení, kolmá na směr působícího tlaku. I když v tomto směru bylo dosud vykonáno jen velmi málo zkoušek, lze říci [33], [1], že pro dlouhodobé deformace je poměr rychlosti příčného roztažení ε_y k rychlosti podélného

stlačení ε_x za jednoosé napjatosti σ_x menší než Poissonovo číslo μ pro pružné deformace. Tento poměr, tj. $(\partial\varepsilon_y/\partial t) : (\partial\varepsilon_x/\partial t)$, označme jako μ' (Poissonovo číslo pro dotvarování). Je obecně funkcí napětí σ_x, času t a τ, $\mu' = \mu'(t, \tau)$. Předpoklad 1 a 2 pak zanedbává závislost na σ_x a času τ a je $\mu' \doteq \mu'(t)$.

Protože vliv čísla μ' u konstrukcí je menší, můžeme jej přibližně pokládat za konstantu (prvé přiblížení). Je to další, v pořadí již čtvrtý předpoklad. Podle rov. (2.1) pak dostaneme

$$\varepsilon_y(t, \tau) = -\mu\frac{\sigma_x(\tau)}{E} - \mu'\frac{\sigma_x(\tau)}{E}[\varphi(t) - \varphi(\tau)]. \tag{2.11}$$

Pro spojitě proměnné napětí se obdrží postupem podobným jako v odst. 2.2 diferenciální rovnice

$$\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\varphi} = -\frac{\mu}{E}\frac{\partial\sigma_x}{\partial\varphi} - \frac{\mu'}{E}\sigma_x. \tag{2.12}$$

Pro pružné deformace je podle ČSN $\mu = 0{,}15$. Ve skutečnosti však μ vzrůstá s napětím a pevností betonu, což se zanedbává. Pro železový beton je třeba s ohledem na větší vliv kostry výztuže, jež sama o sobě (bez betonu) nemá žádná příčná roztažení, a na vliv tahové zóny, jež vzhledem k trhlinkám zmenšuje vliv betonu, uvažovat $\mu \doteq 0$.

Číslo μ' je značně menší než μ, $0 < \mu' \ll \mu$; podle [32], [1] je prakticky nulové. Poněvadž však μ je též malé a zároveň vliv μ a μ' na řešení konstrukce je obvykle malý, lze popřípadě též uvažovat $\mu' \doteq \mu$, usnadňuje-li to řešení (je pak vhodné volit hodnotu asi $^1/_2$ Poissonova čísla pro pružné deformace). Obecně však budeme uvažovat $\mu' \neq \mu$, neboť to rovnice příliš nezkomplikuje (μ' má větší význam u nosníků půdorysně zakřivených, desek ap.).

Obdobným způsobem můžeme vyjádřit i poměrné zkosení úhlů $\gamma_{xy}(t)$, způsobené smykovým napětím τ_{xy} zavedeným v čase τ:

$$\gamma_{xy}(t, \tau) = \frac{\tau_{xy}(\tau)}{G} + \frac{\tau_{xy}(\tau)}{G}[\varphi(t) - \varphi(\tau)]. \tag{2.13}$$

Pro spojitě proměnné napětí je

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\varphi} = \frac{1}{G}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\varphi} + \frac{1}{G'}\tau_{xy}. \tag{2.14}$$

Konstanty G a G' jsou moduly pro smykové deformace krátkodobé vratné, popř. dlouhodobé nevratné. Z podmínky izotropie betonu (transformací souřadnic ve (3.3)) lze odvodit vztahy $G = \frac{1}{2}E/(1 + \mu)$, $G' = \frac{1}{2}E/(1 + \mu') = G(1 + \mu)/(1 + \mu')$. Poněvadž $\beta' \doteq 0$, platí přibližně $G' \doteq \frac{1}{2}E$.

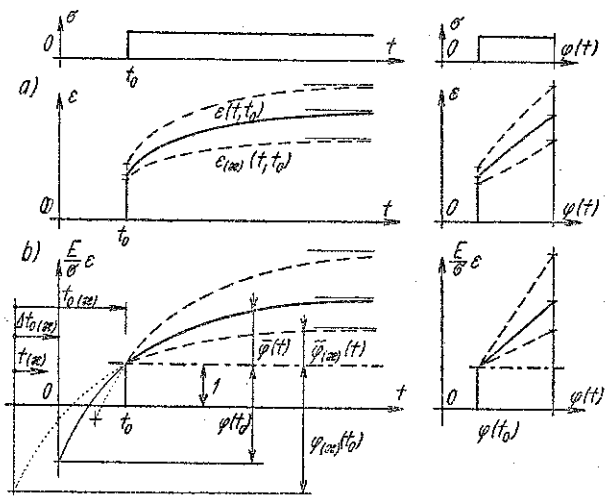
2.5. Nehomogenita konstrukce. Předpoklad vzájemné afinity dotvarování

Nehomogenita konstrukce pro krátkodobé deformace je dána poměrem rychlosti vzrůstu deformace v jednotlivých částech v závislosti na napětí (tečnový modul) v daném čase. Při linearitě jde o poměr modulů pružnosti a Poissonových čísel. Pro E, μ = konst je tato nehomogenita na čase nezávislá.

Hodnoty E se předpisují v závislosti na druhu betonu a pohybují se zhruba v rozmezí 200 až 400 Mp/cm². (Podle ČSN pro B 250 je 285 Mp/cm², pro B 400 je 360 Mp/cm²). Pro ocel je $E = 2\,100$ Mp/cm², pro patentované dráty přibližně 1900 Mp/cm² (přesněji nelinearita), pro zkrucovaná a na 1 500 Mp/cm² i méně.

Nehomogenita dlouhodobých deformací je dána poměrem rychlostí (v závislosti na čase t) deformací jednotlivých částí při stejném napětí. Závisí na rozdílech ve stáří betonu, ve tloušťce průřezů, vlhkosti prostředí, spolupůsobení s ocelí ap.

Při různém stáří betonu je třeba volit společný počátek měření času t pro celou konstrukci. Bývá vhodné zvolit jej zhruba tak, aby vyjadřoval střední stáří betonu v konstrukci. Beton části ($\varkappa$) nechť byl položen o $\Delta t_{(\varkappa)}$ před okamžikem $t = 0$, tj. je o $\Delta t_{(\varkappa)}$ starší než zvolené střední stáří betonu. Část ($\varkappa$) má v čase t stáří $t_{(\varkappa)} = t + \Delta t_{(\varkappa)}$ (obr. 2.7).



Obr. 2.7. **Dotvarování betonů různého stáří za stálé teploty a vlhkosti**
a) skutečné, b) podle předpokladu afinity dotvarování (za Dischingerova průběhu)

Průběh deformace v části ($\varkappa$) vyplývá z rov. (2.1) nebo (2.5), kde však místo ε a φ pišme $\varepsilon_{(\varkappa)}$, $\varphi_{(\varkappa)}$. Hodnota $\varphi_{(\varkappa)}$ vyjadřuje součinitele dotvarování pro část ($\varkappa$). Za jinak stejných podmínek obou částí (vlhkost, teplota, tloušťka aj.) je $\varphi_{(\varkappa)}(t) = \varphi(t_{(\varkappa)})$ a $\varepsilon_{(\varkappa)}(t, \tau) = \varepsilon(t_{(\varkappa)}, \tau_{(\varkappa)})$. Křivky $\varphi_{(\varkappa)}(t)$ jsou pak shodné s $\varphi(t)$ a posunuté ve směru osy času o $-\Delta t_{(\varkappa)}$.

V případě lineární závislosti dlouhodobých deformací a napětí je poměr rychlostí deformace jednotlivých částí na napětí nezávislý, tj. stačí znát poměr $(\mathrm{d}\varepsilon_{(\varkappa)}/\mathrm{d}t) : (\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t)$ pro dané napětí (jednotkové). Tento poměr označíme $\varkappa$ a budeme jej nazývat koeficientem rychlosti dotvarování pro část ($\varkappa$). Závisí obecně na čase t i na stáří τ při zavedení napětí, $\varkappa = \varkappa(t, \tau)$, a vyjadřuje nehomogenitu dotvarování konstrukce. Dosadíme-li do tohoto poměru z rov. (2.1), vymizí závislost na τ a obdržíme vztah mezi $\varphi_{(\varkappa)}(t)$ a $\varphi(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{(\varkappa)}(t)}{\mathrm{d}t} = \varkappa \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2.15}$$

Hodnota $\varkappa$ je pak závislá pouze na čase t, $\varkappa = \varkappa(t)$. Zároveň předpokládáme, že $\varkappa$ je stejné pro podélné i příčné deformace.

Pro další řešení bude velmi výhodné přijmout pro dobu spolupůsobení konstrukce hodnotu $\varkappa$ jako konstantní, nezávislou na čase. (Lze to považovat za prvé přiblížení. Nutný předpoklad to však není — viz odst. 10.1.) Zavádíme tedy další, pátý předpoklad.

Přijatelnost tohoto předpokladu vyplývá z výrazů pro funkci $\varphi(t)$. Dosadíme-li např. rov. (2.8) nebo (2.7) do (2.15), obdržíme

$$\varkappa = \frac{\varphi_{(\varkappa)}(\infty)}{\varphi(\infty)} \mathrm{e}^{-b\Delta t_{(\varkappa)}}, \tag{2.16}$$

tj. hodnotu na t nezávislou. Obráceně lze též ukázat [řešením funkce $\varphi(t)$ z diferenčně diferenciální rovnice $\mathrm{d}\varphi(t + \Delta t)/\mathrm{d}t = \varkappa\, \mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t$], že rov. (2.15) je přesně splněna pro libovolný rozdíl stáří Δt jen tehdy, když $\varphi(t)$ má tvar $a + c\,\mathrm{e}^{-bt}$.

Dosadíme-li do (2.15) průběh podle (2.9), obdržíme též na čase nezávislý výraz

$$\varkappa = \frac{\overline{\varphi}_{\infty(\varkappa)}}{\overline{\varphi}_{\infty}} = \frac{\varphi^c_{(\varkappa)}}{\varphi^c} \frac{k_{1(\varkappa)}}{k_1} \frac{k_{2(\varkappa)}}{k_2} \frac{k_3(t_{0(\varkappa)})}{k_3(t_0)}. \tag{2.17}$$

Pro jiné průběhy $\varphi(t)$, např. podle ČSN, rov. [2.6], je rov. (2.15) splněna jen přibližně. (Je však přijatelná zejména proto, že již samo zavedení funkce $\varphi(t)$ — předpoklad 2 — je přibližné.) S ohledem na velikost chyby je pak

třeba konstantu $\varkappa$ zavést jako jistou střední hodnotu $\varkappa(t)$ v intervalu (t_0, ∞). Protože střední hodnota rychlosti v intervalu (t_0, t) je úměrná poměru $[\varphi(t) - \varphi(t_0)]/(t - t_0)$, plyne z rov. (2.15) v limitě pro $t \to \infty$:

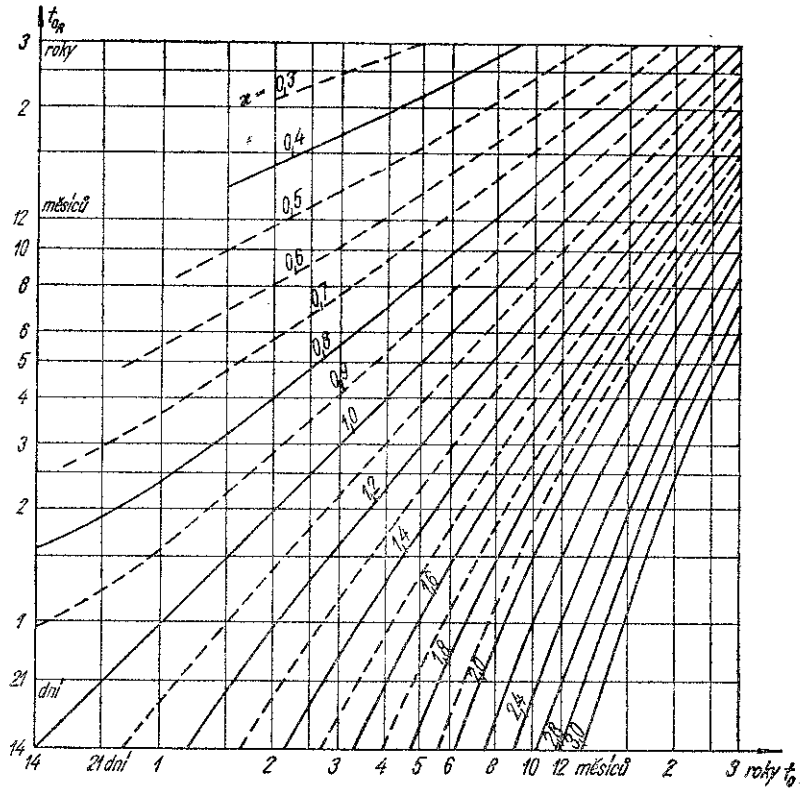
$$\varkappa = \frac{\overline{\varphi}_{(\varkappa)}(\infty)}{\overline{\varphi}(\infty)} = \frac{\varphi_{(\varkappa)}(\infty)}{\varphi(\infty)} \frac{\varphi(\infty) - \varphi(t_{0(\varkappa)})}{\varphi(\infty) - \varphi(t_0)}, \tag{2.18}$$

kde jsme označili $\overline{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, $\overline{\varphi}_{(\varkappa)}(t) = \varphi_{(\varkappa)}(t) - \varphi_{(\varkappa)}(t_0)$.

Integrací rov. (2.15) plyne vztah

$$\overline{\varphi}_{(\varkappa)}(t) = \varkappa \overline{\varphi}(t), \tag{2.19}$$

který geometricky vyjadřuje vzájemnou afinitu křivek dotvarování při stálém napětí (obr. 2.7). (Osou afinity je přímka $\varepsilon = \sigma/E$.) Koeficient rychlosti

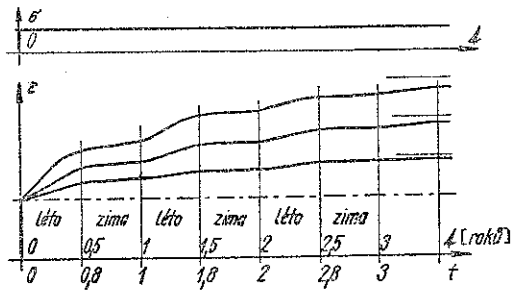


Obr. 2.8. Graf koeficientu afinity dotvarování určený podle ČSN, rovnice (2.6), v závislosti na různých počátečních stářích t_0 a $t_{0(\varkappa)}$ betonu

dotvarování $\varkappa(t, \tau)$ budeme proto v případě $\varkappa$ = konst nazývat koeficientem afinity dotvarování (pro část $\varkappa$). Vyjadřuje časově neměnnou nehomogenitu dotvarování konstrukce. Na obr. 2.8 je uveden graf jeho závislosti na t_0 a $t_{0(\varkappa)}$ při $\varphi_{(\varkappa)}(\infty) = \varphi(\infty)$, odpovídající průběhu $\varphi(t)$ podle ČSN, rov. (2.6). Vliv různé střední vlhkosti jednotlivých částí ($\varkappa$) konstrukce je v rov. (2.18) vyjádřen hodnotami $\overline{\varphi}_{(\varkappa)}(\infty)$ [podle ČSN, podle (2.9) aj.]. Tak např. podle ČSN pro pilíř položený pod vodou platí v poměru k trámu nad vodou $\varkappa \doteq 2/4 = 0{,}5$. Ve výraze (2.17) je dále vyjádřen vliv různé tloušťky jednotlivých průřezů.

Dalším faktorem, který opravňuje k zavedení předpokladu afinity, je působení časových změn teploty a vlhkosti v přírodě (odst. 2.6). Proměna teploty a vlhkosti, zvláště při střídání ročních dob, zpomaluje nebo zrychluje totiž průběhy deformace různě starých částí betonu současně, a zkresluje tedy všechny křivky dotvarování ve stejném poměru, takže afinitu zachovává (obr. 2.9).

Pro spolupůsobení betonu s ocelí je třeba dále zavést vzájemný poměr rychlosti dotvarování. Dotvarování oceli je jev zcela jiný než u betonu a nastává z jiných fyzikálních příčin. Vzniká pouze za vysokých teplot, jaké se ve stavebních konstrukcích prakticky nevyskytují, nebo za normálních teplot v přírodě pouze při vysokých napětích, počínaje asi od 0,5 meze průtažnosti, s nimiž se ve stavebních konstrukcích setkáváme jedině u předpínací výztuže. Můžeme proto rovnou říci, že pro všechny ocelové části konstrukcí vyjma předpínací výztuže je koeficient afinity vůči dotvarování betonu $\varkappa = 0$.



Obr. 2.9. **Dotvarování betonů různého stáří při cyklické proměně vlhkosti a teploty v přírodě**

V předpínací výztuži předpjatých konstrukcí se vyskytují napětí asi 0,7 až 0,9 meze průtažnosti, při nichž již vzniká větší dotvarování. Místo dotvarování při konstantním napětí se zde obvykle udává relaxace napětí při konstantním protažení, z níž lze lépe určovat ztráty předpětí. Protože dotvarování oceli je složitě nelineární, je též vztah dotvarování a relaxace složitý. Přibližně pro předpínací výztuž platí, že celkové dotvarování při stálém napětí je asi 1,25krát až 2krát větší než relaxace. Podle ČSN 73 2004 jsou u patentovaných drátů konečné hodnoty relaxace při počátečním napětí

0,7, popř. 0,9 smluvní meze průtažnosti 0,05, popř. 0,11, což odpovídá dotvarování s konečnou hodnotou asi 0,07, popř. 0,20 [33], představující asi 0,02 až 0,05násobek konečné hodnoty dotvarování betonu. Proto koeficient rychlosti dotvarování $\varkappa(t, \tau)$ musí vždy být $\varkappa \leq 0{,}05$.

Časový průběh dotvarování patentovaných drátů je značně rychlejší než u betonu (viz např. ČSN). Velká část proběhne v prvních hodinách; podle ČSN za 1 h 0,43, za 1 den 0,64, za 1 měsíc 0,85. Podle [33] se přibližně za 7 až 60 dní dosáhne prakticky konečné hodnoty. Podle [45] je dlouhodobé dotvarování větší, trvá několik let a je v normách podceňováno.

Průběh dotvarování předpínací výztuže je daleko od afinity k dotvarování betonu, avšak co do velikosti je značně menší. Proto lze i zde přibližně uvažovat $\varkappa \doteq 0$ nebo případně $\varkappa \doteq 0{,}004$ až $0{,}02$ při vyšších napětích.

Dlouhodobé deformace se též objevují u zkrucovaných ocelových lan visutých mostů. Nejedná se však o dotvarování, ale o postupné zaklínování drátů do mezer, vznikající hlavně v důsledku dynamických zatížení [33]. Proměnlivost těchto deformací je velká. Pro spolupůsobení s betonem lze přibližně položit $\varkappa \doteq 0{,}05$ až $0{,}2$.

Hodnotu $\varkappa \doteq 0$ lze přibližně uvažovat i pro deformace podloží tvořeného štěrkem, pískem, štěrkopískem nebo skálou, pro kamenné zdivo, makadam, beton Prepakt ap., neboť jejich deformace jsou v poměru k betonu prakticky jen krátkodobé (viz kap. 9).

Pro smršťování za předpokladu úměrnosti k součiniteli dotvarování platí podle (2.10) vztah

$$\bar{\varepsilon}_{sm(\varkappa)}(t) = \varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \overline{\varphi}(t), \tag{2.20}$$

kde $\bar{\varepsilon}_{sm(\varkappa)}(t) = \varepsilon_{sm(\varkappa)}(t) - \varepsilon_{sm(\varkappa)}(t_0)$ je smrštění části ($\varkappa$) od času t_0 do t, $\varepsilon_{sm(\varkappa)}(t) = \varepsilon_{sm}(t_{(\varkappa)})$ je celkové smrštění části ($\varkappa$) o stáří $t_{(\varkappa)}$ v čase t. Při užití hodnoty podle (2.10a) však úměrnost k $\overline{\varphi}(t)$ platí jen přibližně. Obecně bylo by možno zavést koeficient rychlosti smršťování $\varkappa_{sm}(t)$, tj.

$$\varepsilon_{sm(\varkappa)}(t) = \varkappa_{sm}(t) \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \overline{\varphi}(t), \tag{2.21}$$

což je sice správnější, ale zvyšuje to pracnost řešení. Předpokládáme-li zde vzájemnou afinitu mezi průběhy smršťování, obdržíme pak

$$\varkappa_{sm}(t) \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \doteq \varkappa \frac{\varepsilon^c_{sm(\varkappa)}}{\varphi^c_{(\varkappa)}} \frac{k_4(t_{0(\varkappa)})}{k_3(t_{0(\varkappa)})} \frac{k_3(t_0)}{k_4(t_0)} \frac{k_4(t_0) - k_4(t)}{k_3(t_0) - k_3(t)}. \tag{2.21a}$$

K dosazení do (2.20) lze přibližně uvažovat

$$\varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \doteq \varkappa \frac{\varepsilon^c_{sm(x)}}{\varphi^c_{(\infty)}} \frac{k_4(t_{0(x)})}{k_3(t_{0(x)})}. \qquad (2.20a)$$

2.6. Redukce času

Součinitel dotvarování byl dosud uvažován za předpokladu, že atmosférické podmínky, tj. teplota a vlhkost, jsou neměnné v čase, takže v hodnotách součinitele dotvarování je vyjádřen pouze vliv průměrných atmosférických podmínek prostředí. V přírodě však proměna teploty a vlhkosti, zvláště při střídání ročních dob, silně zrychluje nebo zpomaluje průběh deformace (obr. 2.9). Toto zrychlení nebo zpomalení je přibližně stejné pro části různě staré nebo v různých časech zatížené, což je v souhlase s předpokladem afinity.

Vzhledem k tomu, že zrychlení průběhu je přibližně stejné pro všechny části, můžeme proměnu atmosférických podmínek vyjádřit tak, že při určení součinitele dotvarování budeme místo skutečného času, jejž nyní označme t, uvažovat tzv. redukovaný čas, pro nějž budeme užívat dosavadní značení t nebo τ. Redukci obecně vyjádříme vztahem

$$\mathrm{d}t = \varrho(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} \quad \text{nebo} \quad t = \int_0^t \varrho(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}, \qquad (2.22)$$

kde ϱ(t) je koeficient redukce. Tato redukce umožňuje rozšířit platnost předcházejících rovnic i pro skutečné podmínky v přírodě.

Z proměn atmosférických vlivů lze v projektu konstrukce předvídat prakticky jenom periodické pravidelné změny během cyklu ročních dob (obr. 2.9). Pokud průměrné atmosférické podmínky jsou vyjádřeny již přímo v součiniteli $\varphi(\infty)$ a koeficient ϱ vyjadřuje jen cyklické změny, musí pro každý interval délky jednoho roku být $\int \varrho\,\mathrm{dt} = 1$ rok.

Redukovaný čas se tedy skládá z časových úseků Δt, které jsou ϱnásobkem skutečných časových úseků Δt. S ohledem na různá měření provedená na hotových stavbách, např. na mostu přes Neckar [33, st. 97, obr. 2.67] aj. [22], je možno ve středoevropských podmínkách přibližně uvažovat pro letní měsíce červen až září $\varrho = \varrho_1$, pro zimní měsíce prosinec až březen $\varrho = 2 - \varrho_1$ a pro ostatní měsíce $\varrho = 1$, kde $\varrho_1 = 1{,}3$ až 2,0. Podmínka, že součet redukovaných časů za 1 rok se musí rovnat právě jednomu roku, je přitom splněna, neboť

$\frac{3}{12}\varrho_1 + \frac{3}{12}(2 - \varrho_1) + 2\frac{3}{12} = 1$. Při praktickém výpočtu je často vhodné provést redukci graficky, tj. tím, že v harmonogramu betonáže se pro výpočet osy skutečného času zakreslí osa redukovaného času (obr. 2.9, 4.5).

U konstrukcí ze stejně starého betonu nebo při nehomogenitě beton—ocel není redukce času nutná. Proměna teploty a vlhkosti totiž konečné účinky neovlivňuje, neboť jejich hodnoty závisí pouze na $\varphi(\infty)$ a nikoliv na tvaru funkce $\varphi(t)$.

Je-li však beton konstrukce různého stáří, záleží též na tom, jak velká dlouhodobá deformace již proběhla ve starší části do té doby, než byla vybetonována část mladší. Je-li tato doba kratší než rok, je zde nutno redukci uvažovat. Stejný časový rozdíl způsobuje totiž značně větší nehomogenitu, spadá-li do letního období, než když spadá do zimy.

Příklad 2.6.1. Nechť stojky 1 rámu se betonují 1. června, nosníky 2 rámu 1. září. Potom skutečný časový rozdíl je 3 měsíce, redukovaný časový rozdíl při $\varrho_1 \doteq 5/3$ je $5/3 \,.\, 3 = 5$ měsíců. Odskruží-li se rám 15. října (začátek spolupůsobení) a zvolíme-li počátek měření času 15. července, je $t = 1{,}5 \,.\, \frac{5}{3} + 1{,}5 = 4$ měsíce, kdežto pro stojky 1 je $t_{0_1} = 5 + 1{,}5 = 6{,}5$ měsíců, pro nosníky 2 rámu $t_{0_2} = 1{,}5$ měsíce. Odtud lze určit buď z grafu na obr. 2.8 nebo výpočtem (podle tabulky v ČSN 73 2004, str. 61): $\overline{\varphi}(\infty) \sim 1 - 0{,}662 = 0{,}338$, $\overline{\varphi}_1(\infty) \sim 1 - 0{,}721 = 0{,}279$, $\overline{\varphi}_2(\infty) \sim 1 - 0{,}546 = 0{,}454$; $\varkappa_1 = 0{,}279/0{,}338 = 0{,}83$, $\varkappa_2 = 0{,}454/0{,}338 = 1{,}34$.

Uvažujeme-li dále, že střední tloušťka betonu v trámu je 20 cm a ve stojkách 80 cm, bylo by nutno podle (2.9) a (2.17) psát $\varkappa_1 \doteq 0{,}83 \,.\, 0{,}55 = 0{,}46$. Kdyby dále část stojek byla trvale pod vodou, bylo by pro tuto část $\varkappa_1 \doteq 0{,}5 \,.\, 0{,}46 = 0{,}24$. Pro nosníky zůstává $\varkappa_2 = 1{,}34$, takže jejich dotvarování je téměř 6krát větší než u stojek.

Z tohoto příkladu je vidět, že vliv různého stáří betonu se obvykle sčítá s vlivem různé tloušťky a vlhkosti, neboť tlustší (a ve vodě položené) části se betonují dříve než části tenčí (a nad vodou). Tato nehomogenita, k níž se v praxi dosud obvykle nepřihlíží, může působit znatelné přesuny momentů do stojek.

3. Nehomogenní těleso

3.1. Definice transformovaného tělesa (konstrukce, systému)

Definujme transformované těleso (popř. konstrukci, systém) jako takové pružné těleso, které je geometricky totožné s daným nehomogenním betonovým tělesem (konstrukcí, systémem), avšak místo modulů pružnosti E má moduly pružnosti $E' = E/\varkappa$, místo Poissonových čísel μ má Poissonova čísla μ'. Jeho moduly pružnosti ve smyku při izotropii pak místo $G = \frac{1}{2}E/(1+\mu)$ jsou $G' = \frac{1}{2}E'/(1+\mu') = [(1+\mu)/(1+\mu')]\,(G/\varkappa)$. U obecně nehomogenního tělesa je $\varkappa = \varkappa(x, y, z)$ funkce souřadnic x, y, z. Pak je též E' obecně funkcí x, y, z tj. $E' = E'(x, y, z)$. Transformovaným tělesem je vyjádřena nehomogenita daného tělesa z hlediska rychlosti dotvarování.

3.2. Přetvárné rovnice za složené napjatosti

Uvažujme obecnou prostorovou napjatost a deformaci nehomogenního izotropního tělesa v kartézských souřadnicích x, y, z. Napětí σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, poměrná protažení ε_x, ε_y, ε_z, zkosení úhlů γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} a posunutí u, v, w uvažujme jako veličiny proměnné s časem t. Lze je též považovat za funkce $\varphi(t)$, tj. za složené funkce t, neboť $\varphi(t)$ je spojitá stále rostoucí funkce. Způsob podepření tělesa nechť se v čase t nemění.

Rovnice rovnováhy (statické), rovnice kompatibility a rovnice geometrické jsou stejné pro všechny druhy přetváření. Platí tedy (malé deformace)

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + V_x = 0, \ \ldots, \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}, \ \ldots, \tag{3.1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}, \ \ldots,$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ \ldots \tag{3.1c}$$

Ke každé rovnici existují další dvě, vznikající cyklickou záměnou x, y, z, které zde ani dále nevypisujeme. Hodnoty V_x, V_y, V_z značí objemové síly. Jako okrajové podmínky tělesa jsou dány v každém bodě povrchu buď povrchová napětí (zatížení) p_x, p_y, p_z (nebo síly P_x, ...), anebo vynucené deformace, tj. posunutí u, v, w (popřípadě pootočení). Jsou-li n_x, n_y, n_z směrové kosiny normály povrchu, platí

$$n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} = p_x, \ \ldots \tag{3.1d}$$

Derivováním rovnic (3.1a—d) podle t nebo φ získáme rovnice stejného tvaru mezi rychlostmi deformace $\partial\varepsilon_x/\partial t$, ..., popř. $\partial\varepsilon_x/\partial\varphi$, ... v proměnné t, popř. φ, rychlostmi změny napětí, povrchových sil a objemových sil $\partial\sigma_x/\partial t$, ..., $\partial p_x/\partial t$, ..., $\partial V_x/\partial t$, popř. $\partial\sigma_x/\partial\varphi$, ... a rychlostmi posunutí $\partial u/\partial t$, ..., popř. $\partial u/\partial\varphi$.

Diferenciální přetvárné (fyzikální) rovnice izotropního tělesa za složené prostorové napjatosti lze sestavit podle principu superpozice z rovnic (2.5), (2.12), (2.14). Obdržíme

$$\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} + \sigma_x\right) - \frac{1}{E}\left(\mu\frac{\partial\sigma_y}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} + \mu'\sigma_y\right) -$$
$$- \frac{1}{E}\left(\mu\frac{\partial\sigma_z}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} + \mu'\sigma_z\right) + \frac{\partial\varepsilon_{sm(\varkappa)}}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} + \alpha\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_{(\varkappa)}}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} = \frac{1}{G}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\varphi_{(\varkappa)}} + \frac{1}{G'}\tau_{xy}, \ \ldots,$$

kde $\Theta = \Theta(t)$ značí teplotu a α součinitel tepelné roztažnosti. Podle rov. (2.15) a (2.21) vyplývají odtud podle definice v odst. 3.1 přetvárné rovnice

$$\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial\varphi} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial\varphi} - \mu\frac{\partial\sigma_y}{\partial\varphi} - \mu\frac{\partial\sigma_z}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{E'}(\sigma_x - \mu'\sigma_y - \mu'\sigma_z) +$$
$$+ \varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \varphi} = \frac{1}{G}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varphi} + \frac{1}{G'}\tau_{xy}, \ldots .$$

Vzhledem k předpokladu izotropie betonu (quasiizotropie) platí mezi přetvárnými konstantami vztahy $G = \frac{1}{2}E/(1+\mu)$, $G' = \frac{1}{2}E'/(1+\mu') = G(1+\mu)/\varkappa(1+\mu')$, jež plynou z (3.3) transformací souřadnic otočením.

Analogicky s teorií pružnosti můžeme říci, že šest přetvárných rovnic (3.3) tvoří spolu s rovnicemi (3.1a—c), s okrajovými podmínkami podepření (geometrickými) a zatížení (3.1d) (statickými) a s časově počátečními podmínkami $\sigma_x(t_0) = \sigma_{x_0}, \ldots$ úplný systém parciálních lineárních diferenciálních rovnic, postačující k matematickému řešení problému. Přetvárné rovnice pro pružný stav — Hookův zákon — jsou speciálním případem rovnic (3.3) pro $\varkappa = 0$ ve všech bodech tělesa.

Superpozicí z rovnic (2.4) apod. nebo integrováním rovnic (3.3) lze sestavit integrální přetvárné rovnice zahrnující též počáteční podmínky

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E}[\sigma_x(t) - \mu\sigma_y(t) - \mu\sigma_z(t)] + \frac{1}{E'}\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} [\sigma_x(\tau) - \mu'\sigma_y(\tau) - \mu'\sigma_z(\tau)]\,\mathrm{d}\varphi(\tau) + \varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\varphi(t) + \alpha[\Theta(t) - \Theta(t_0)], \tag{3.3a}$$

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{1}{G}\tau_{xy}(t) + \frac{1}{G'}\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \tau_{xy}(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau),$$

. . . . . .

Rovnice pro rovinnou napjatost nebo přetvoření jsou speciálním případem rovnic (3.3) pro $\sigma_z = 0$ nebo $\varepsilon_z = 0$.

3.3. Partikulární řešení a ustálená napjatost

Snadno můžeme nalézt partikulární řešení systému rovnic (3.1) a (3.3) vzhledem k času při daných stálých okrajových podmínkách podepření (posunutí), je-li zatížení včetně objemových sil i rozdělení teploty konstantní. Platí, že partikulární řešení, tj. jedno z možných řešení rov. (3.3) a (3.1) bez ohledu na počáteční podmínky, je napjatost (vnitřní síly) transformovaného tělesa pro dané vnější stálé zatížení a poměrná smrštění $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ a dané rozdělení teploty za daných okrajových podmínek podepření; jsou to konstantní napětí, která označíme $\sigma_{x_p}, \ldots, \tau_{zx_p}$. Důkaz plyne např. dosazením partikulárního řešení $\sigma_{x_p}, \ldots, \tau_{zx_p}$ za $\sigma_x, \ldots, \tau_{zx}$ do systému rovnic (3.1) a (3.3). Platí zřejmě $\partial\sigma_{x_p}/\partial\varphi = \ldots = \partial\tau_{zx_p}/\partial\varphi = 0$, takže z rovnic (3.3) dostaneme

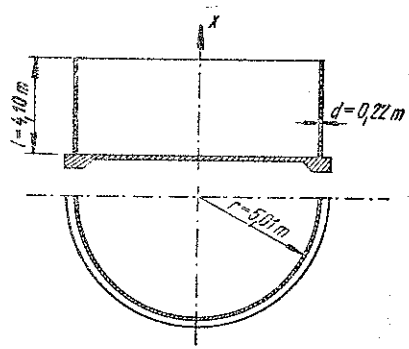
$$\varepsilon'_x = \frac{1}{E'}(\sigma_{x_p} - \mu\sigma_{y_p} - \mu\sigma_{z_p}) + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \tag{3.4}$$

$$\gamma'_{xy} = \frac{1}{G'}\tau_{xy_p},$$

. . . . . .

kde $\varepsilon'_x = \partial\varepsilon_x/\partial\varphi, \ldots, \gamma'_{zx} = \partial\gamma_{zx}/\partial\varphi$.

Toto partikulární řešení představuje ustálený stav napjatosti daného tělesa pro dané stálé zatížení a konečná smrštění. Rychlosti přetváření vzhledem k proměnné $\varphi(t)$ jsou za tohoto stavu konstantní a dotváření a smrštění je tedy též ustálené. U každého tělesa pro dané stálé zatížení a konečné hodnoty $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ existují právě jedny takové počáteční hodnoty, že se napjatost vlivem dotvarování a smršťování nemění. Jsou to hodnoty $\sigma_{x_p}, \ldots$. Tento stav, který by byl jistě výhodný, nelze však u praktických konstrukcí často realizovat (posuvem podpor, předpětím, rektifikací) s ohledem na velikost napětí.



Obr. 3.1.

Uvažujme nyní čistě teoretický limitní případ $\varphi \to \infty$. Při daném stálém zatížení musí mít napětí při libovolných počátečních podmínkách konečnou limitu a pro $\varphi \to \infty$ vzniká tedy ustálený stav napjatosti. To však je partikulární řešení, takže pro $\varphi \to \infty$ je $\lim \sigma_x = \sigma_x, \ldots, \lim \tau_{zx} = \tau_{zx_p}$. S rostoucím $\varphi(t)$, a tedy i s postupem času t se napětí postupně přibližuje partikulárním hodnotám $\sigma_{x_p}, \ldots, \tau_{zx_p}$ (počínaje jistým časem). Ve skutečnosti však, pokud počáteční hodnoty $\sigma_x(t_0)$ nejsou zároveň partikulární, napětí partikulárních hodnot nikdy dosáhnout nemohou, neboť $\varphi(t)$ nabývá pro $t \to \infty$ konečné maximální hodnoty $\varphi(\infty)$, a dosahují pouze hodnot $\sigma_x(\infty), \ldots, \tau_{zx}(\infty)$, a to vzhledem k tvaru funkce $\varphi(t)$ pouze asymptoticky, v limitě pro $t \to \infty$. Obvykle proto bývá $\sigma_{x_0} \lessgtr \sigma_x(t) \lessgtr \sigma_x(\infty) \lessgtr \sigma_{x_p}, \ldots$, avšak vždy by to platilo pouze pro dostatečně velké $\varphi(t)$. Graficky je průběh řešení znázorněn na obr. 4.1.

Vlastnosti partikulárního řešení a transformované konstrukce znázorňuje velmi dobře reologický model betonu v odst. 10.4, obr. 10.3a. Transformované těleso je těleso z viskózní (vazké) kapaliny, jehož napětí σ_x jsou úměrné $\partial\varepsilon_x/\partial\varphi$ ap.

Poznámka: Je-li zatížení Z (jako celek, vektor) proměnné ve tvaru $Z = Z_a P(\varphi)\cos\gamma\varphi + Z_b Q(\varphi)\sin\gamma\varphi$, kde β, γ jsou jisté konstanty, Z_a, Z_b daná zatížení (vektory) a $P(\varphi)$, $Q(\varphi)$ mnohočleny nejvýše q-tého stupně, a probíhají-li popřípadě posuvy podpor s časovým průběhem téhož tvaru, lze partikulární řešení (nenastává-li jistý speciální případ) hledat ve tvaru $\sigma_{x_0}(t) = R(\varphi)\cos\gamma\varphi + S(\varphi)\sin\gamma\varphi$, kde $R(\varphi)$, $S(\varphi)$ jsou mnohočleny q-tého stupně. Je to analogie k obdobné větě v odst. 4.5; odvozením se však nebudeme zabývat.

3.4. Homogenní těleso

Obecné řešení napjatosti ve speciálním případě tělesa (konstrukce, systému) homogenního z hlediska dotvarování a smršťování je jednoduché, jestliže $\mu' \doteq \mu$, neboť integraci v čase lze pak oddělit od integrace v prostorových souřadnicích. Pro homogenní těleso platí $\varkappa = \text{konst}$ ve všech bodech tělesa, což odpovídá stejně starému betonu. Transformované těleso (konstrukce) se ztotožní s daným tělesem. Pro pružné deformace může být těleso nehomogenní.

Uvažujme napřed časově konstantní zatížení, neposuvné podpory a stacionární teplotní pole. Dosadíme-li do rovnic (3.3) $\varkappa = 1$ a $E' = E$ a označíme-li $\partial\varepsilon_x/\partial\varphi = \varepsilon_x'$, ..., zjistíme porovnáním systému rovnic (3.3), (3.1a) a rovnic (3.1b, c), derivovaných podle $\varphi(t)$ se systémem rovnic (3.4) atd., že jsou s ohledem na stejné okrajové podmínky obou systémů totožné, jestliže platí vztahy

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial\varphi} + \sigma_x = \sigma_{x_p}, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\varphi} + \tau_{xy} = \tau_{xy_p}, \quad \ldots \tag{3.5}$$

Z jednoznačnosti řešení obou systémů plyne nutnost těchto vztahů. Partikulární hodnoty napětí σ_{x_p}, ..., τ_{xy_p} jsou hodnoty napětí v daném pružném tělese (konstrukci) pro dané vnější stálé zatížení, poměrná smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ a dané rozdělení teploty za okrajových podmínek platných v průběhu dotvarování.

Rovnice (3.5) jsou nezávislé obyčejné lineární diferenciální rovnice pro časový průběh napětí. Při počátečních podmínkách $\sigma_x(t_0) = \sigma_{x_0}$, ... řešení rovnic (3.5) je

$$\begin{aligned}\sigma_x(t) &= \sigma_{x_p} + (\sigma_{x_0} - \sigma_{x_p})\,\mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)},\\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy_p} + (\tau_{xy_0} - \tau_{xy_p})\,\mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{3.6}$$

Vidíme, že proměna všech napětí se děje podle téže funkce $\mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)}$ (Viz též [18], [33], [54] aj.) Podle této funkce se mění účinky náhlého posuvu podpor nebo rektifikací, změny statického působení a smršťování a malé náhlé změny rozdělení teploty. Tyto vlivy jsou do rovnic zavedeny počátečními napětími σ_{x_0}, ... v čase t_0, tj. při začátku spolupůsobení konstrukce, a napětími σ_{x_p}, ... jaké by v pružné konstrukci vznikly při okrajových podmínkách platných pro $t > t_0$ v průběhu dotvarování. Účinky náhlého posuvu podpor nebo náhlé změny rozdělení teploty v čase t_0 se redukují na $\mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)}$ násobek (relaxace napětí). Účinky změny statického působení nebo smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, vypočtené podle teorie pružnosti, je třeba násobit $1 - \mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)}$. Rovnají-li se počáteční napětí σ_{x_0}, ... napětím partikulárním σ_{x_p}, ..., zůstávají napětí konstantní a dotvarováním a smršťováním nevznikají žádné změny napjatosti. Uvažujeme-li pouze vliv dotvarování, nastává tento případ tehdy, jestliže u homogenní konstrukce nedošlo k žádné změně statického působení, posuvu podpor ap. Většinou to platí u tradičních betonových konstrukcí monolitických, avšak u mnohých moderních konstrukcí montovaných apod. to obvykle nenastává.

Uvažujme nyní časově proměnné zatížení, posuvy podpor a rozdělení teploty. Označme jako $\sigma_{x_z}(t)$, popř. $\sigma_{x_a}(t)$ a $\sigma_{x_{sm}}$ vnitřní síly, jež by odpovídaly podle teorie pružnosti vnějšímu zatížení v čase t, popř. posuvu podpor a teplotě v čase t, popř. poměrnému smrštění velikosti $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Jestliže pro tyto vnitřní síly napíšeme podle teorie pružnosti systém přetvárných rovnic s okrajovými podmínkami a porovnáme jej s rovnicemi (3.1-3), obdržíme při $\varkappa = 1$ nezávislé diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}\varphi} + \sigma_x = \frac{\mathrm{d}\sigma_{x_z}}{\mathrm{d}\varphi} + \sigma_{x_z} + \frac{\mathrm{d}\sigma_{x_a}}{\mathrm{d}\varphi} + \sigma_{x_{sm}}, \tag{3.5a}$$

jejichž řešení je

$$\begin{aligned}\sigma_x(t) = \sigma_{x_z}(t) + [\sigma_{x_0} - \sigma_{x_z}(t_0)]\,\mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)} + \sigma_{x_{sm}}[1 - \mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)}] +\\ + \mathrm{e}^{-\overline{\varphi}(t)}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\overline{\varphi}(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma_{x_a}(\tau).\end{aligned} \tag{3.6a}$$

Totéž bychom obdrželi i z rov. (3.6) užitím principu superpozice. Z poslední rovnice je vidět, že vnitřní síly od proměnného zatížení zavedeného až na

definitivním statickém systému nezávisí na dotvarování a jsou rovny silám vypočteným podle teorie pružnosti.

Příklad 3.4.1. Uvažujme *válcovou rotační nádrž* podle obr. 3.1 z betonu o $E = 3{,}3 \cdot 10^6$ Mp/m². Nechť nádrž je nehomogenní co do stáří betonu, dno má beton starší než stěny o 50 dní, přičemž rozdíl stáří spadá do léta, takže $\Delta t = 1{,}8 \cdot 50$ dní $= 3$ měsíce. Stěny nechť jsou homogenní, $\varkappa = 1$. Pro beton základu je pak ($t_0 = 14$ dní) $\varkappa = 0{,}615$. Dále nechť základ je v poměru ke skořepině stěn absolutně tuhý. Stěny lze pak řešit samostatně jako homogenní skořepinu. Vypočteme účinky rozdílného smršťování základu a stěn při $\varepsilon_{sm}(\infty) = -2 \cdot 10^{-4}$, $\varphi(\infty) = 3$, za předpokladu, že tření v základu prakticky nezmenšuje jeho smrštění. Smršťování vyvolává radiální posuv paty stěn o časovém průběhu $(1 - \varkappa)\,\varphi(t)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, čímž vznikají ve stěnách kruhově souměrné ohybové momenty $M_x(x, t)$ ve svislé normálové rovině a normálné síly $N_\varphi(x, t)$ ve vodorovné rovině.

Vyřešíme napřed vnitřní síly $M_{x_2}, \ldots$ vzniklé podle teorie pružnosti posuvem paty stěn o $(1 - \varkappa)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Podle [3, rov. (499)], platí pro průhyb stěn při okrajových podmínkách v horním okraji $x = 0$, $M_x = 0$, $T_x = 0$ a v patě $x = l$, $w(l) = r(1 - \varkappa)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, $w'(l) = 0$ vztah $w(x) = (f_3 + f_4)\,r(1 - \varkappa)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, kde f_3, f_4 jsou funkce podle [3]. Podle rov. (500) ve [3] lze vypočíst $M_{x_2} = (f_3 - f_4)\,E(dc^2/2r)\,(1 - \varkappa)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, $M_{\varphi 2} = \mu M_{x_2}$, $T_{x_2} = f_3 E(dc/r)\,(1 - \varkappa)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, $N_{\varphi 2} = -(f_3 + f_4) \times \times Ed(1 - \varkappa)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, kde $c^4 = \frac{1}{3}\,r^2 d^2/(1 - \mu^2)$.

Podle rov. (3.6a) můžeme nyní vyjádřit

$$M_x(t) = \int_{t_0}^{t} M_{x_2}\,\mathrm{e}^{-\bar{\varphi}(t)+\bar{\varphi}(\tau)}\,\mathrm{d}\bar{\varphi}(\tau) = M_{x_2}[1 - \mathrm{e}^{-\bar{\varphi}(t)}].$$

Stejné výrazy obdržíme i pro $N_\varphi(t)$, $Q_x(t)$.

Numerickým vyčíslením nyní dostaneme: $c = 0{,}803$ m, $M_{x_2} = 1{,}18(f_4 - f_3)$ Mpm/m, $T_{x_2} = -2{,}99 f_3$ Mp/m, $N_{\varphi_2} = 18{,}6(f_3 + f_4)$ Mp/m, $\bar{\varphi}(\infty) = 3(1 - 0{,}422) = 1{,}73$, $1 - \mathrm{e}^{-\bar{\varphi}(\infty)} = 0{,}823$. Pro patu stěny je $f_3 = 1$, $f_4 = 0$, takže výsledek je $M_x(l, \infty) = -0{,}97$ Mpm/m, $T_x(l, \infty) = -2{,}46$ Mp/m, $N_\varphi(l, \infty) = 15{,}3$ Mp/m. Pro porovnání hodnoty od tlaku náplně jsou: max $M_x = 1{,}06$ Mpm/m, max $T_x = 2{,}97$ Mp/m (v patě) a max $N_\varphi = 11{,}7$ Mp/m (ve výšce 1,65 m). Účinky jsou tedy velmi velké. Snížení je možno dosáhnout bezprostředně navazující betonáží a brzkým napuštěním, jež by snížilo $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, popřípadě provedením těsněné dilatace v patě. (Poznámka: Táž úloha je řešena ve [30] přibližně jako vliv ochlazení o −15 °C.

3.5. Analogie dotvarování s pružností

Všimněme si ve stručnosti dále vztahu systému rovnic pro napjatost pružného tělesa a systému rovnic pro dotvarování a smršťování.

Přetvárné rovnice pružného tělesa, tj. Hookův zákon, zní

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\,\sigma_x - \frac{\mu}{E}\,(\sigma_y + \sigma_z) + \varepsilon_{sm} + \alpha\Theta, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy}, \ldots \tag{3.7}$$

Porovnejme nyní tyto rovnice s přetvárnými rovnicemi (3.3), které přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi} &= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varkappa\right)\sigma_x - \\ &- \frac{1}{E}\left(\mu\,\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu'\varkappa\right)(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\partial \varepsilon_{sm(\varkappa)}}{\partial \varphi} + \varkappa\,\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \varphi} &= \frac{2}{E(1+\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varkappa\,\frac{1+\mu'}{1+\mu}\right)\tau_{xy}, \ldots . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že tyto rovnice vzniknou z rov. (3.7), jestliže v nich zaměníme modul E za diferenciální operátor

$$\boldsymbol{E} = E\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varkappa\right)^{-1} \tag{3.9a}$$

a Poissonovo číslo μ za operátor

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\mu\,\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu'\varkappa\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varkappa\right)^{-1}, \tag{3.9b}$$

přičemž $\partial \varepsilon_{sm(\varkappa)}/\partial \varphi = \varkappa \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Z rov. (3.8) dále vidíme, že vzhledem k izotropii se modul G zaměňuje za operátor

$$\boldsymbol{G} = G\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1+\mu'}{1+\mu}\,\varkappa\right)^{-1}. \tag{3.9c}$$

Pro $\mu' = \mu$ se hodnota μ nezaměňuje a G se zaměňuje formálně stejně jako $\boldsymbol{E}$.

Tato substituční věta platí stejným způsobem pro všechny přetvárné rovnice teorie pružnosti, neboť tyto rovnice jsou důsledkem Hookova zákona. Lze tedy z rovnic různých problémů teorie pružnosti výše uvedenou záměnou získat přetvárné rovnice pro tentýž problém při dotvarování a smršťování.

Užitím Laplaceovy transformace vyjádřené vztahem $f^*(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p\bar{\varphi}} f(\bar{\varphi})\,\mathrm{d}\bar{\varphi}$ přecházejí funkce $\bar{\varphi}$ na funkce parametru p. Operátory (3.9a—c) se přitom za

nulových počátečních podmínek pro $\overline{\varphi} = 0$ transformují na algebraické funkce parametru p, neboť zavedením $\overline{\varphi}$ za nezávisle proměnnou se v nich u derivací vyskytují pouze konstanty. Vycházíme-li přímo z analogie s rovnicemi teorie pružnosti, odpovídají modulu E, Poissonovu číslu μ a modulu G v transformovaných rovnicích úlohy dotvarování po řadě funkce parametru p:

$$\frac{Ep}{p+\varkappa}, \quad \frac{\mu p + \mu'\varkappa}{p+\varkappa}, \quad \frac{Gp}{p+\varkappa\dfrac{1+\mu'}{1+\mu}}. \tag{3.9d}$$

Smrštění ε_{sm} v úloze pružnosti odpovídá funkce $\dfrac{1}{p}\varkappa\dfrac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$. Nejsou-li počáteční podmínky pro neznámé funkce nulové, je třeba od všech členů obsahujících neznámé funkce (napětí, deformace) odečíst odpovídající členy výchozí rovnice teorie pružnosti, do nichž jsou dosazeny dané počáteční hodnoty neznámých. Vyřešení neznámých jako funkcí parametru p představuje problém teorie pružnosti. Zpětnou transformací funkcí parametru p na funkce proměnné $\overline{\varphi}$ lze pak obdržet průběh neznámých v závislosti na $\overline{\varphi}$.

Uvedeným postupem lze řešit každou úlohu o dotvarování za našich výchozích předpokladů. Řešení zároveň ukazuje, že každou úlohu o dotvarování lze převést na úlohu teorie pružnosti.

Konstanty pružnosti lze ovšem za operátory (3.9a—c) zaměnit pouze tehdy, jestliže rovnice pružnostní konstanty obsahuje. Tak např. při rovinné úloze nelze již záměnu provést v rovnici $\nabla^4 F = 0$ pro funkci napětí F, odvozené z Hookova zákona, neboť konstanty pružnosti se při jejím odvození vyrušily. Lze to však již provést v rovnici $\nabla^4 F = -E\nabla^2\varepsilon_{sm(x)}$ zahrnující vliv smrštění. Záměnou E za (3.9a) odtud dostaneme rovnici

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\right)\nabla^4 F = -\nabla^2\left(E\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right) \tag{3.10}$$

pro funkci napětí $F(x, y, t)$ určující řešení rovinné úlohy, jsou-li dána napětí po celém obvodě. [Rov. (3.10) lze též odvodit, dosadí-li se výrazy $\partial^2 F/\partial y^2 = \sigma_x$, $\partial^2 F/\partial x^2 = \sigma_y$, $\partial^2 F/\partial x\partial y = -\tau_{xy}$, splňující rovnice rovnováhy (3.1a), do přetvárných rovnic (3.3) a odtud do rovnice kompatibility (3.1b). Vyjma smrštění nezávisí řešení na přetvárných konstantách.]

Pro názornost uveďme ještě příklady. Přetvárné rovnice pro průhyb *válcové rotační skořepiny* kruhově souměrně zatížené (obr. 3.1) v teorii pružnosti zní $\mathrm{d}^2 w/\mathrm{d}x^2 = M_x/D$, $w = rN_\varphi/Ed$. Pro skořepinu nehomogenní po

délce, avšak homogenní v každé kružnici, obdržíme při dotvarování záměnou konstant přetvárné rovnice

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{D}\frac{\partial M_x}{\partial\varphi} + \frac{1}{D'}M_x, \qquad \frac{Ed}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} = \frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi} + \varkappa N_\varphi, \tag{3.11}$$

kde $D = \frac{1}{12}Ed^3/(1-\mu^2)$, $D' = \frac{1}{12}Ed^3/(1-\mu'^2)$. Spolu s rovnicí rovnováhy a okrajovými a počátečními podmínkami určují řešení w. Pro $D = \text{konst}$ platí v teorii pružnosti výsledná rovnice $\partial^4 w/\partial x^4 + w \,.\, 12(1-\mu^2)/r^2 d^2 = p/D$. Pro $\mu' = \mu$ dostaneme záměnou

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12(1-\mu^2)}{r^2 d^2}w\right) = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\right)p. \tag{3.11a}$$

Přetvárné rovnice *desky* s označením podle odst. 5.6c zní

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D}\frac{\partial M_x}{\partial\varphi} + \frac{1}{D'}M_x &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
\frac{1}{D}\frac{\partial M_y}{\partial\varphi} + \frac{1}{D'}M_y &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
\frac{1}{D(1-\mu)}\frac{\partial M_{xy}}{\partial\varphi} + \frac{M_{xy}}{D'(1-\mu')} &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Spolu s rovnicí rovnováhy $\partial^2 M_x/\partial x^2 + 2\partial^2 M_{xy}/\partial x\partial y + \partial^2 M_y/\partial y^2 = p$ s okrajovými a počátečními podmínkami určují řešení. Záměnou konstant v deskové rovnici pro průhyb lze získat při $\mu' = \mu$ a $D = \text{konst}$:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\nabla^4 w = -\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\right)\frac{p}{D}. \tag{3.12a}$$

Zaměníme-li konstanty v Laméových rovnicích pro složky posunutí tělesa, obdržíme při $\mu' = \mu$ rovnice

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\right)V_x = 0, \ \ldots \tag{3.13}$$

U nosníku na pružném podkladu s dlouhodobým průběhem sedání obdržíme podle vztahů a označení v odst. 5.6e rovnice

$$EJ\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial M}{\partial\varphi} - \varkappa M, \qquad k\frac{\partial w}{\partial\varphi} = \frac{\partial p}{\partial\varphi} + \varkappa_p p, \tag{3.14}$$

jež je nutno doplnit ještě rovnicí rovnováhy $\partial^2 M/\partial x^2 = q - p$. Zaměníme-li konstanty ve výsledné rovnici pro M nebo v rovnici pro w, obdržíme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa_p\right)\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right]+\frac{1}{EJ}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa\right)M=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa_p\right)q\right] \tag{3.14a}$$

nebo pro w při $\varkappa = \text{konst}$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa_p\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+k\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa\right)w = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}+\varkappa_p\right)q. \tag{3.14b}$$

4. Staticky neurčité konstrukce

Zabývejme se nyní staticky neurčitými nehomogenními konstrukcemi, u nichž je počet veličin neurčených podmínkami rovnováhy konečný. Pro tyto konstrukce platí vše, co bylo zatím odvozeno pro tělesa, avšak lze u nich dospět k dalším podrobnějším výsledkům [5], [6], [7].

V této kapitole budeme vyšetřovat pouze nehomogenní konstrukce s průřezy homogenními z hlediska dotvarování, tj. složenými pouze z betonu stejného stáří nebo pouze z oceli. Přibližně však můžeme k těmto konstrukcím počítat i ty konstrukce, u nichž nehomogenita průřezu je pro spolupůsobení konstrukce jako celku zanedbatelná, jako je tomu u konstrukcí ze železového betonu (součinitel dotvarování je nutno redukovat podle odst. 4.9) a z předpjatého betonu vzhledem k relativně malé ploše a momentu setrvačnosti ocelových vložek. Praktickým příkladem konstrukcí, jež lze přibližně uvažovat jako nehomogenní konstrukce složené z prutů, jsou např. letmo betonované nebo montované mosty, spojité nosníky a nosníkové rošty montované z prefabrikátů různého stáří nebo spolupůsobící s částmi betonovanými dodatečně na staveništi, nosníky spínané z různě starých dílců a konstrukce s výrazně různou tloušťkou průřezů a vlhkostí jejich prostředí (plný pilíř — dutý trám). Dalším příkladem těchto konstrukcí s nehomogenitou beton—ocel jsou zavěšené a visuté mosty s betonovým trámem, oblouky s táhlem aj. Speciálním případem jsou i všechny homogenní staticky neurčité konstrukce.

4.1. Deformace prutu

Mechanika konstrukcí složených z prutů vychází ze zákonů deformace, které jsou v technické teorii pružnosti založeny na zjednodušujícím Navierově (Bernoulliho) předpokladu o zachování rovinných průřezů.

U prutů se zavádí jako vnitřní síly ohybový moment $M = M(x, t)$, normálná síla $N = N(x, t)$, posouvající síla T a v prostorovém případě ještě kroutící moment K, příčný ohybový moment a příčná posouvající síla. Souvislost s napětími je dána vztahy $N = \iint_F \sigma_x \, dy \, dz$, $M = \int\int_F \sigma_x z \, dy \, dz$, ..., kde x značí délkovou souřadnici prutu a z nebo y souřadnice průřezu od těžiště v rovině působícího momentu M a posouvající síly T kolmo na ni.

Podle hypotézy rovinných průřezů jsou normálná napětí σ_x homogenního průřezu dána stejným vztahem jako v technické teorii pružnosti, tj. $\sigma_x = Mz/J + N/F$, kde F nebo J značí plochu nebo moment setrvačnosti průřezu, neboť napjatost homogenního systému se podle odst. 3.4 dotvarováním a smršťováním nemění. Dosadí-li se tento vztah do rov. (2.5), psané pro homogenní průřez s koeficientem afinity dotvarování podle rov. (2.15), obdržíme po přičtení smršťování

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi} = \frac{1}{EJ}\frac{\partial M}{\partial \varphi} z + \frac{1}{EF}\frac{\partial N}{\partial \varphi} + \frac{Mz}{E'J} + \frac{N}{E'F} + \varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}. \tag{4.1}$$

V této rovnici lze deformaci ε_x rozdělit na člen nezávislý na z, vyjadřující poměrné prodloužení prutu ε, a člen úměrný z, vyjadřující křivost prutu $\partial^2 w/\partial x^2$, tj. $\varepsilon_x = -z \, . \, (\partial^2 w/\partial x^2) + \varepsilon + \alpha\Theta'$, takže hypotéza zachování rovinných průřezů platí i pro homogenní dotvarování a smršťování ($\Theta' = \partial\Theta/\partial z$ značí konstantní spád teploty po výšce průřezu). Dosazením do rov. (4.1) plyne

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = \frac{1}{EF}\frac{\partial N}{\partial \varphi} + \frac{N}{E'F} + \varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{EJ}\frac{\partial M}{\partial \varphi} - \frac{M}{E'J} + \alpha \frac{\partial \Theta'}{\partial \varphi},$$

což jsou diferenciální rovnice ohybové čáry prutu při uvažování pouze ohybových deformací. Dosazením rovnice rovnováhy $\partial^2 M/\partial x^2 = -q$ lze vyloučit momenty. Při $\varkappa = \text{konst}$ obdržíme tak rovnice (bez vlivu teploty)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \varkappa q + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\alpha\frac{\partial \Theta'}{\partial \varphi}\right). \tag{4.2a}$$

Rovnice (4.2) platí i pro průřez nehomogenní z hlediska pružnosti, avšak homogenní z hlediska dotvarování ($\varkappa = \text{konst}$ v celém průřezu), když EJ, popř. EF vyjadřuje náhradní tuhost nehomogenního průřezu. Obdobné rovnice bylo by možno odvodit i pro vliv K nebo T ap.

Poznámka: Rov. (4.2) a obdobné rovnice pro vliv T a K plynou též přímo analogií dotvarování s pružností — odst. 3.5.

4.2. Deformace konstrukce

Z diferenciální rovnice (4.2) pro ohybovou čáru prutu lze podle principu virtuálných prací (který lze užít, neboť se jedná o rovnovážné soustavy sil) vypočíst deformace konstrukce složené z prutů. Hledejme deformaci $\delta_X(t)$ staticky neurčité konstrukce ve smyslu jisté dané statické veličiny X. Uvažujme virtuální zatěžovací stav $\overline{X} = 1$, který nechť vyvolává na dané pružné konstrukci vnitřní síly $\overline{M}, \overline{H}, \overline{T}, \overline{K}, \ldots$. Podle věty o virtuálných pracích se virtuálná práce vnějších sil $\overline{1} \, . \, \mathrm{d}\delta(t)$ musí rovnat součtu virtuálných prací vnitřních sil $\overline{M}, \overline{N}, \ldots$ na vnitřních deformacích $\mathrm{d}(\partial^2 w/\partial x^2)$, $\mathrm{d}\varepsilon(t), \ldots$ ve smyslu těchto sil, daných rovnicemi (4.2) pro vnitřní síly $M(t)$, $N(t)$, ... v čase t. Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}\delta_X(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \int_0 \left[\overline{M}\left(\frac{1}{EJ}\frac{\partial M}{\partial \varphi} + \frac{M}{E'J} + \alpha\frac{\partial \Theta'}{\partial \varphi}\right) + \right.$$

$$\left. + \overline{N}\left(\frac{1}{EF}\frac{\partial N}{\partial \varphi} + \frac{N}{E'F} + \varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}\right) + \ldots\right] \mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

kde $M(t), N(t)$ ... značí vnitřní síly v čase t. Bez újmy na obecnosti nevypisujeme zde členy týkající se posouvajících sil T, kroutících momentů K atd. [členy: $(\partial T/\partial\varphi)/GF_0 + T/G'F_0$, $(\partial K/\partial\varphi)/GJ_k + K/G'J_k$ atd.] O značí integraci přes všechny pruty konstrukce. Zavedeme-li výrazy

$$\delta_{el_X}(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}M(t)}{EJ} + \frac{\overline{N}N(t)}{EF} + \ldots\right)\mathrm{d}x + \int_0 (\overline{M}\alpha\Theta' + \overline{N}\alpha\Theta)\,\mathrm{d}x,$$

$$\delta'_X(t) = \int \left(\frac{\overline{M}M(t)}{E'J} + \frac{\overline{N}N(t)}{E'F} + \ldots\right)\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

$$\delta'_{sm_X} = \int_0 \overline{N}\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\,\mathrm{d}x,$$

lze psát rovnici (4.3) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\delta_X(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\delta_{el_X}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_X(t) + \delta'_{sm_X}. \tag{4.5}$$

Je to základní rovnice pro výpočet průběhu deformace konstrukce při známém průběhu vnitřních sil. Výraz $\delta_{el_X}(t)$ značí pružnou deformaci dané konstrukce ve smyslu veličiny X v čase t, odpovídající vnitřním silám $M(t)$, $N(t)$, $T(t)$, $K(t)$ ... a rozdělení teploty v čase t. Výrazy $\delta'_X(t)$, popř. δ'_{sm_X} vyjadřují deformaci ve smyslu veličiny X na dané pružné staticky neurčité konstrukci, odpovídající vnitřním silám $\varkappa M(t)$, $\varkappa N(t)$, $[(1+\mu')/(1+\mu)]\,\varkappa T(t)$, $[(1+\mu')/(1+\mu)]\,\varkappa K(t)$, ..., popř. poměrným smrštěním $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

(Poznámka: Rov. (4.5) též přímo plyne podle analogie dotvarování s pružností, odst. 4.5.)

Deformace $\delta_X(t)$ daná rovnicí (4.5) závisí na hodnotách vnitřních sil v čase t, které je tedy nutno předem vypočíst. Základní statická soustava musí být taková, aby její vnitřní síly byly dány samotným vnějším zatížením konstrukce a nezávisely na dotvarování a smršťování.

To nastává jednak pro staticky určitou konstrukci, neboť její vnitřní síly jsou jednoznačně dány podmínkami rovnováhy, nebo též pro jistý případ staticky neurčitých konstrukcí. Podle odst. 3.4 je to případ homogenní staticky neurčité konstrukce, u níž nedošlo k posuvu podpor, rektifikaci ani změně statického působení a jejíž geometrický tvar je takový, že se může volně smršťovat (např. spojitý nosník na vodorovně posuvných podporách, nosníkový rošt na vodorovných kuličkových ložiscích ap.). V těchto případech vnitřní síly $\overline{M}, \overline{N}, \overline{T}$ jsou zřejmě rovny vnitřním silám, které by vznikly od virtuálního zatížení $\overline{X} = 1$ na transformované konstrukci, takže výraz $\delta'_X(t)$, rov. (4.4), pak představuje pružnou deformaci transformované konstrukce, odpovídající vnitřním silám $M(t)$, $N(t)$, ...

4.3. Základní statická soustava

Základní statickou soustavu je tedy třeba volit tak, aby všechny její části byly buď staticky určité, nebo též staticky neurčité, pokud jsou však homogenní, nedochází v nich k posuvu podpor, rektifikaci ani změně statického působení a mohou se volně smršťovat i tepelně deformovat. Přetváření soustavy je dáno rovnicí (4.5), kde $\delta'_X(t)$ znamená pružnou deformaci *transformované konstrukce* odpovídající vnitřním silám v čase t.

Poznámka: Podmínka volného smršťování nemusí však být splněna tehdy, pokud se bude počítat pouze vliv dotvarování, zatím co vliv smršťování se pak určí odděleně podle principu superpozice. Podobně podmínka volného posuvu podpor apod. nemusí být splněna, jestliže vliv tohoto posuvu bude stanoven později odděleně.

4.4. Přetvárné rovnice

Mějme nyní staticky neurčitou konstrukci, která má pro $t > t_0$ stálé statické působení a neposuvné podpory. Nechť konstrukce přejde uvolněním n staticky neurčitých, na čase závislých vazeb $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$ ve zvolenou základní soustavu vyhovující podmínkám z předešlého odstavce. Označme $\mathfrak{M}(t)$, $\mathfrak{N}(t)$, $\mathfrak{T}(t)$, $\mathfrak{K}(t)$, ... vnitřní síly na základní soustavě od vnějšího zatížení v čase t a $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$, $\overline{T}_i$, $\overline{K}_i$, ... od zatížení veličinou $\overline{X}_i = 1$. Do stálého zatížení je třeba zahrnout též vliv předpětí. Pak jsou vnitřní síly dány vztahem

$$M(t) = \mathfrak{M}(t) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i X_i(t) \tag{4.6}$$

a obdobně pro $N(t)$, ... atd.

Pružnou deformaci na základní soustavě dané, popř. transformované konstrukce ve smyslu veličiny X_j, způsobenou zatížením $\overline{X}_i = 1$, označme δ_{ij} nebo δ'_{ij}. Pružnou deformaci na základní soustavě transformované konstrukce ve smyslu X_i, vyvolanou vnějším zatížením v čase t (bez posuvu podpor a změn teploty) nebo poměrnými smrštěními $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, označme $\delta'_i(t)$ nebo δ'_{sm_i} a pružnou deformaci na základní soustavě dané konstrukce ve smyslu X_i vyvolanou vnějším zatížením, celkovým posuvem podpor v čase t (předem daným) a změnou teploty a jejího rozdělení od času t_0 do t jako $\delta_i(t)$.

Podle teorie pružnosti platí ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\delta'_{ij} = \delta'_{ji}$):

$$\delta_{ij} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EJ} + \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EF} + \frac{\overline{T}_i \overline{T}_j}{GF_0} + \frac{\overline{K}_i \overline{K}_j}{GJ_k} + \dots \right) \mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

$$\delta'_{ij} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{E'J} + \dots \right) \mathrm{d}x,$$

$$\delta_i(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \mathfrak{M}(t)}{EJ} + \frac{\overline{N}_i \mathfrak{N}(t)}{EF} + \dots \right) \mathrm{d}x + \delta_{s_i}(t) + \int_0 (\overline{M}_i \alpha\Theta' + \overline{N}_i \alpha\Theta)\, \mathrm{d}x,$$

$$\delta'_i(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \mathfrak{M}(t)}{E'J} + \dots \right) \mathrm{d}x, \tag{4.8}$$

lze psát rovnici (4.3) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\delta_X(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\delta_{el_X}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_X(t) + \delta'_{sm_X}. \tag{4.5}$$

Je to základní rovnice pro výpočet průběhu deformace konstrukce při známém průběhu vnitřních sil. Výraz $\delta_{el_X}(t)$ značí pružnou deformaci dané konstrukce ve smyslu veličiny X v čase t, odpovídající vnitřním silám $M(t)$, $N(t)$, $T(t)$, $K(t)$ ... a rozdělení teploty v čase t. Výrazy $\delta'_X(t)$, popř. δ'_{sm_X} vyjadřují deformaci ve smyslu veličiny X na dané pružné staticky neurčité konstrukci, odpovídající vnitřním silám $\varkappa M(t)$, $\varkappa N(t)$, $[(1+\mu')/(1+\mu)]\,\varkappa T(t)$, $[(1+\mu')/(1+\mu)]\,\varkappa K(t)$, ..., popř. poměrným smrštěním $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

(Poznámka: Rov. (4.5) též přímo plyne podle analogie dotvarování s pružností, odst. 4.5.)

Deformace $\delta_X(t)$ daná rovnicí (4.5) závisí na hodnotách vnitřních sil v čase t, které je tedy nutno předem vypočíst. Základní statická soustava musí být taková, aby její vnitřní síly byly dány samotným vnějším zatížením konstrukce a nezávisely na dotvarování a smršťování.

To nastává jednak pro staticky určitou konstrukci, neboť její vnitřní síly jsou jednoznačně dány podmínkami rovnováhy, nebo též pro jistý případ staticky neurčitých konstrukcí. Podle odst. 3.4 je to případ homogenní staticky neurčité konstrukce, u níž nedošlo k posuvu podpor, rektifikaci ani změně statického působení a jejíž geometrický tvar je takový, že se může volně smršťovat (např. spojitý nosník na vodorovně posuvných podporách, nosníkový rošt na vodorovných kuličkových ložiscích ap.). V těchto případech vnitřní síly $\overline{M}, \overline{N}, \overline{T}$ jsou zřejmě rovny vnitřním silám, které by vznikly od virtuálního zatížení $\overline{X} = 1$ na transformované konstrukci, takže výraz $\delta'_X(t)$, rov. (4.4), pak představuje pružnou deformaci transformované konstrukce, odpovídající vnitřním silám $M(t)$, $N(t)$, ...

4.3. Základní statická soustava

Základní statickou soustavu je tedy třeba volit tak, aby všechny její části byly buď staticky určité, nebo též staticky neurčité, pokud jsou však homogenní, nedochází v nich k posuvu podpor, rektifikaci ani změně statického působení a mohou se volně smršťovat i tepelně deformovat. Přetváření soustavy je dáno rovnicí (4.5), kde $\delta'_X(t)$ znamená pružnou deformaci *transformované konstrukce* odpovídající vnitřním silám v čase t.

Poznámka: Podmínka volného smršťování nemusí však být splněna tehdy, pokud se bude počítat pouze vliv dotvarování, zatím co vliv smršťování se pak určí odděleně podle principu superpozice. Podobně podmínka volného posuvu podpor apod. nemusí být splněna, jestliže vliv tohoto posuvu bude stanoven později odděleně.

4.4. Přetvárné rovnice

Mějme nyní staticky neurčitou konstrukci, která má pro $t > t_0$ stálé statické působení a neposuvné podpory. Nechť konstrukce přejde uvolněním n staticky neurčitých, na čase závislých vazeb $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$ ve zvolenou základní soustavu vyhovující podmínkám z předešlého odstavce. Označme $\mathfrak{M}(t)$, $\mathfrak{N}(t)$, $\mathfrak{T}(t)$, $\mathfrak{K}(t)$, ... vnitřní síly na základní soustavě od vnějšího zatížení v čase t a $\overline{M}_i, \overline{N}_i, \overline{T}_i, \overline{K}_i, \ldots$ od zatížení veličinou $\overline{X}_i = 1$. Do stálého zatížení je třeba zahrnout též vliv předpětí. Pak jsou vnitřní síly dány vztahem

$$M(t) = \mathfrak{M}(t) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i X_i(t) \tag{4.6}$$

a obdobně pro $N(t)$, ... atd.

Pružnou deformaci na základní soustavě dané, popř. transformované konstrukce ve smyslu veličiny X_j, způsobenou zatížením $\overline{X}_i = 1$, označme δ_{ij} nebo δ'_{ij}. Pružnou deformaci na základní soustavě transformované konstrukce ve smyslu X_i, vyvolanou vnějším zatížením v čase t (bez posuvu podpor a změn teploty) nebo poměrnými smrštěními $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, označme $\delta'_i(t)$ nebo δ'_{sm_i} a pružnou deformaci na základní soustavě dané konstrukce ve smyslu X_i vyvolanou vnějším zatížením, celkovým posuvem podpor v čase t (předem daným) a změnou teploty a jejího rozdělení od času t_0 do t jako $\delta_i(t)$.

Podle teorie pružnosti platí ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\delta'_{ij} = \delta'_{ji}$):

$$\delta_{ij} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EJ} + \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EF} + \frac{\overline{T}_i \overline{T}_j}{GF_0} + \frac{\overline{K}_i \overline{K}_j}{GJ_k} + \ldots \right) \mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

$$\delta'_{ij} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{E'J} + \ldots \right) \mathrm{d}x,$$

$$\delta_i(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \mathfrak{M}(t)}{EJ} + \frac{\overline{N}_i \mathfrak{N}(t)}{EF} + \ldots \right) \mathrm{d}x + \delta_{s_i}(t) + \int_0 (\overline{M}_i \alpha\Theta' + \overline{N}_i \alpha\Theta)\, \mathrm{d}x,$$

$$\delta'_i(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}_i \mathfrak{M}(t)}{E'J} + \ldots \right) \mathrm{d}x, \tag{4.8}$$

$$\delta'_{sm_i} = \int_0 \bar{N}_i \varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \, \mathrm{d}x,$$

kde $\delta_{s_i}(t)$ značí vliv celkového posuvu podpor v čase t. Nechť daná konstrukce není výjimkovým případem, tj. nechť determinant $(\delta_{ij}) \neq 0$.

Poznámka. U předpjaté konstrukce, uvažujeme-li přibližně předpětí jako předem známé vnější zatížení, je nutno do vlivu stálého zatížení zahrnout též vliv předpětí. Celkové momenty tedy jsou $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{zat} + \mathfrak{M}_{př}$. Protože hodnoty ztrát předpětí bývají značně nejisté, je vhodné posoudit předpjatou konstrukci pro krajní možné hodnoty předpětí max $\mathfrak{M}_{př}$ a min $\mathfrak{M}_{př}$, tj. dvakrát.

Přetvárné výminky neboli podmínky souvislosti (kompatibility) staticky neurčité konstrukce vyžadují, aby deformace základní soustavy konstrukce i její změna za dobu $\mathrm{d}t$ ve smyslu všech staticky neurčitých veličin X_i byla nulová. Podle principu superpozice lze dosadit do rov. (4.5) použité pro deformaci ve smyslu veličiny X_i tyto hodnoty:

$$\delta_{si}(t) = \delta_i(t) + \sum_{j=1}^{n} X_j(t)\delta_{ji}, \quad \delta'(t) = \delta'_i(t) + \sum_{j=1}^{n} X_j(t)\delta'_{ji}, \quad \delta'_{sm} = \delta'_{sm_i},$$

což plyne vzhledem k (4.7 a 4.8) dosazením rov. (4.6) do výrazů (4.4). Z podmínky nulové deformace $\delta(t)$ se po úpravě obdrží přetvárné rovnice staticky neurčité konstrukce

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\mathrm{d}X_j(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} X_j(t) + \delta'_i(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_i} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.9}$$

Poznámka. Názorně lze tyto rovnice též odvodit, představíme-li si po dobu $\mathrm{d}t$ uvolněny vazby $X_1, \ldots X_n$. Za tuto dobu vzniknou totiž dotvarováním a smršťováním ve smyslu X_i deformace $(\Sigma\delta'_{ij}X_i + \delta'_i + \delta'_{sm_i})\,\mathrm{d}\varphi$, které musí být za dobu $\mathrm{d}t$ anulovány pružnými deformacemi $\Sigma\delta_{ij}\,\mathrm{d}X_i + \mathrm{d}\delta_i$, odpovídajícími změnám vnitřních sil, zatížení, posuvů podpor a teploty na základní soustavě.

Tytéž rovnice lze obdržet i přímo z přetvárných výminek $\Sigma\delta_{ij}X_i + \delta_i = 0$ pružné konstrukce, užije-li se analogie dotvarování s pružností, odst. 3.5.

Přetvárné rovnice (4.9) tvoří systém n simultánních obyčejných lineárních nehomogenních diferenciálních rovnic prvého řádu s konstantními koeficienty pro neznámé $X_1(t), \ldots, X_n(t)$. Přetvárné výminky pružné konstrukce jsou jejich speciálním případem pro $\mathrm{d}X_j/\mathrm{d}\varphi = 0$, $\mathrm{d}\delta_i/\mathrm{d}\varphi = 0$, $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$, $\delta'_i = \delta_i$.

Rovnice (4.9) lze zapsat též v maticovém tvaru

$$[\delta_{ij}]\left[\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}\varphi}\right] + [\delta'_{ij}][X_i] + \left[\delta'_i + \frac{\mathrm{d}\delta_i}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_i}\right] = 0, \tag{4.9a}$$

kde [ ] značí čtvercovou matici s indexy $i, j = 1, \ldots, n$ nebo sloupcovou s indexy i nebo $j = 1, \ldots, n$. Řešením rovnic (4.9) nebo (4.9a) vzhledem k neznámým $\mathrm{d}X_i/\mathrm{d}\varphi$ obdržíme kanonický tvar systému

$$\frac{\mathrm{d}X_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j(t) + B_i(t), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.10}$$

neboli

$$\left[\frac{\mathrm{d}X_i(t)}{\mathrm{d}\varphi}\right] = [A_{ij}]\,[X_j(t)] + [B_i(t)], \tag{4.10a}$$

kde

$$[A_{ij}] = -[\delta_{ik}]^{-1}[\delta'_{kj}],$$

$$[B_i(t)] = -[\delta_{ij}]^{-1}\left[\delta'_j(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_j(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_j}\right]. \tag{4.11}$$

Inverzní matice $[\delta_{ij}]^{-1}$ bývá často známa již předem z výpočtu příčinkových čar konstrukce a převod na kanonický tvar je pak snadný.

Při časově konstantním zatížení a teplotě vypadne v rov. (4.9) nebo (4.11) člen $\mathrm{d}\delta_i/\mathrm{d}\varphi = 0$ a platí $\delta'_i = \text{konst}$, $B_i = \text{konst}$.

Kanonický tvar (4.10) obdržíme přímo, jestliže se volí ortogonální staticky neurčité veličiny X_i (pro něž je $\delta_{ij} = 0$ při $i \neq j$). Volbou systému ortogonálních staticky neurčitých veličin anebo aspoň určité jejich skupiny lze dosáhnout značného zjednodušení výpočtu.

Přetvárné rovnice (4.9) jsou vlastně zobecněním silové metody pro pružné konstrukce, neboť vyjadřují přetvárné výminky souvislosti konstrukce. Mohli bychom si též představit obdobu deformační metody vycházející z rovnováhy změn vnitřních sil (relaxací) staticky neurčitých prvků konstrukce vyjádřených pomocí deformací prvků (obvykle vetknutých prutů). Tento postup vede k metodě podle odst. 5.13 a 5.8.

4.5. Obecné řešení

Obecně lze systém (4.9) řešit různými způsoby popsanými v učebnicích matematiky. Např. je možno po úpravě na kanonický tvar (4.10) převést systém postupným derivováním rovnic a eliminací neznámých na jednu

obyčejnou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu pro jednu staticky neurčitou veličinu ([51], str. 456, [38]). Jiné řešení lze provést užitím Laplaceovy transformace (operátorovým počtem [38]). Zde ve stručnosti ukážeme přímé řešení systému (4.9), který nebudeme převádět na kanonický tvar (pro kanonický tvar systému viz [38, str. 677], [44, str. 310]).

Podmínkou existence řešení v daném intervalu je spojitý průběh vnějšího zatížení. Je-li průběh zatížení po částech spojitý, je nutno řešit každý interval se spojitým průběhem zvlášť.

Obecné řešení nehomogenního systému (4.9) nebo (4.10) je součtem obecného řešení příslušného homogenního systému, tj. bez členů $\delta_i'(t)$, $\mathrm{d}\delta_i(t)/\mathrm{d}\varphi$ a δ'_{sm_i}, a některého partikulárního řešení nehomogenního systému (4.9) nebo (4.10).

Obecné řešení homogenního systému je

$$\begin{aligned} X_1 &= C_1{}^1X_1 + C_2{}^2X_1 + \ldots + C_n{}^nX_{1n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= C_1{}^1X_n + C_2{}^2X_n + \ldots + C_n{}^nX_n, \end{aligned} \tag{4.12}$$

kde funkce ${}^iX_i$ tvoří tzv. fundamentální systém řešení, pro nějž musí být determinant $({}^iX_i) \neq 0$ (lineárně nezávislé řádky a sloupce). Předpoklad, že řešení má tvar $X_1 = k_1\,\mathrm{e}^{\lambda\varphi}$, $X_2 = k_2\,\mathrm{e}^{\lambda\varphi}$, …, $X_n = k_n\,\mathrm{e}^{\lambda\varphi}$ vede po dosazení do (4.10) k řešení homogenního systému n lineárních rovnic

$$\begin{aligned} &(\delta_{11}\lambda + \delta'_{11})\,k_1 + \ldots + (\delta_{n1}\lambda + \delta'_{n1})\,k_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\delta_{1n}\lambda + \delta'_{1n})\,k_1 + \ldots + (\delta_{nn}\lambda + \delta'_{nn})\,k_n = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

který má nenulové řešení tehdy a jen tehdy, je-li splněna charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}\lambda + \delta'_{11}, & \delta_{21}\lambda + \delta'_{21}, & \ldots, & \delta_{n1}\lambda + \delta'_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{1n}\lambda + \delta'_{1n}, & \delta_{2n}\lambda + \delta'_{2n}, & \ldots, & \delta_{nn}\lambda + \delta'_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Je to algebraická rovnice n-tého stupně pro λ, jež má n kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Jsou-li všechny kořeny λ_j různé, je předpoklad řešení správný, neboť máme n lineárně nezávislých funkcí $\mathrm{e}^{\lambda_1\varphi}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n\varphi}$. Dosazením λ_1 do (4.13) a řešením systému dostaneme systém čísel ${}^1k_1, {}^1k_2, \ldots, {}^1k_n$, určených jednoznačně až na libovolný násobek; jedno z nich lze tedy volit, např. ${}^ik_1 = 1$. [Jsou to čísla úměrná subdeterminantům libovolného řádku determinantu (4.12), násobená postupně 1,—1,1, … $(-1)^{n-1}$]. První systém funkcí fundamentálního systému pak je ${}^1X_1 = {}^1k_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1\varphi}$, ${}^1X_2 = {}^1k_2\,\mathrm{e}^{\lambda_1\varphi}$, …, ${}^1X_n = {}^1k_n\,\mathrm{e}^{\lambda_1\varphi}$. Obdobně dosazením dalších hodnot λ_j $(j = 2, \ldots, n)$ do (4.13) dostaneme fundamentální systémy ${}^iX_1 = {}^ik_1\,\mathrm{e}^{\lambda_j\varphi}$, …, ${}^iX_n = {}^ik_n\,\mathrm{e}^{\lambda_j\varphi}$ $(j = 2, \ldots, n)$.

b) Je-li některý kořen λ_j r-násobný, odpovídá mu r lineárně nezávislých řešení $\mathrm{e}^{\lambda_j\varphi}$, $\varphi\,\mathrm{e}^{\lambda_j\varphi}$, …, $\varphi^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda_j\varphi}$, což však platí, jen když matice determinantu (4.14) má hodnost $n-1$ (všechny subdeterminanty nejsou nulové); jinak některá řešení závisí na méně než n libovolných konstantách (podrobněji viz [44] str. 310, [38], str. 681).

Poznámka: Pro kanonický tvar systému obdržíme obdobné rovnocenné rovnice

$$\begin{aligned} &(A_{11} - \lambda)\,k_1 + A_{21}k_2 + \ldots + A_{n1}k_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A_{1n}k_1 + A_{2n}k_2 + \ldots + (A_{nn} - \lambda)\,k_n = 0; \end{aligned} \tag{4.13a}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda, & A_{21}, & \ldots, & A_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ A_{1n}, & A_{2n}, & \ldots, & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14a}$$

Partikulární řešení $X_{1_p}, \ldots, X_{n_p}$ nehomogenního systému (4.9) je možno obecně určit z fundamentálního systému ${}^iX_i$ metodou variace konstant ve tvaru $X_{1_p}(t) = C_1(t)\,{}^1X_i + C_2(t)\,{}^2X_i + \ldots + C_n(t)\,{}^nX_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, kde funkce $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ se určí jako některé řešení systému rovnic $(\mathrm{d}C_1/\mathrm{d}\varphi)\,{}^1X_i + \ldots + (\mathrm{d}C_n/\mathrm{d}\varphi)\,{}^nX_i = B_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Jsou-li však absolutní členy $\delta_i' + \mathrm{d}\delta_i/\mathrm{d}\varphi + \delta'_{sm_i}$ složeny ze členů speciálního tvaru $\mathrm{e}^{\beta\varphi}[P_i(\varphi)\cos\gamma\varphi + Q_i(\varphi)\sin\gamma\varphi]$, kde β, γ jsou jisté konstanty a $P_i(\varphi)$, $Q_i(\varphi)$ mnohočleny nejvýše q-tého stupně ve φ, lze odpovídající partikulární řešení hledat ve tvaru $X_{i_p}(t) = \varphi^r\,\mathrm{e}^{\beta\varphi}[R_i(\varphi)\cos\gamma\varphi + S_i(\varphi)\sin\gamma\varphi]$, kde $R_i(\varphi)$, $S_i(\varphi)$ jsou mnohočleny q-tého stupně a r je buď rovno 0, když β není kořenem charakteristické rovnice (4.14), nebo když r je β-násobným kořenem rov. (4.14) a $\gamma = 0$, vyjadřuje jeho násobnost.

Je-li zatížení pro $t > t_0$ konstantní a neprobíhají-li časové posuvy podpor a změny teploty, je $\mathrm{d}\delta_i/\mathrm{d}\varphi = 0$, $\delta_i' = \mathrm{konst}$. Partikulární řešení systému (4.9) lze pak určit jako konstanty $X_{1_p}, \ldots, X_{n_p}$, které jsou řešením systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} &\delta'_{11}X_{1_p} + \delta'_{21}X_{2_p} + \ldots + \delta'_{n1}X_{n_p} + \delta'_1 + \delta'_{sm_1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\delta'_{1n}X_{1_p} + \delta'_{2n}X_{2_p} + \ldots + \delta'_{nn}X_{n_p} + \delta'_n + \delta'_{sm_n} = 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

jak je možno přesvědčit se dosazením do (4.9). Z rovnic (4.15) plyne, že *partikulárním řešením* při stálém zatížení a stálé poloze podpor a teplotě jsou vnitřní

síly transformované konstrukce pro dané zatížení a poměrná smrštění $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Tyto vnitřní síly lze určit kteroukoliv metodou užívanou k řešení pružných konstrukcí, např. metodou silovou, deformační, Crossovou ap.

Obecné řešení systému (4.9) je tedy

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_{1_p}(t) + C_1{}^1k_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1\overline{\varphi}(t)} + \ldots + C_n{}^nk_1\,\mathrm{e}^{\lambda_n\overline{\varphi}(t)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_n(t) &= X_{n_p}(t) + C_1{}^1k_n\,\mathrm{e}^{\lambda_1\overline{\varphi}(t)} + \ldots + C_n{}^nk_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n\overline{\varphi}(t)}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

kde však v případě r-násobného kořene λ_j místo odpovídajících r funkcí $\mathrm{e}^{\lambda_j\overline{\varphi}}$, …, $\mathrm{e}^{\lambda_{j+r-1}\overline{\varphi}}$ stojí funkce $\mathrm{e}^{\lambda_j\overline{\varphi}}$, $\overline{\varphi}\,\mathrm{e}^{\lambda_j\overline{\varphi}}$, …, $\overline{\varphi}^{r-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_j\overline{\varphi}}$ $[\overline{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0)]$.

Poznámka. Násobný kořen by se vyskytnul při řešení homogení soustavy, již však lze řešit jednodušeji přímo.

Průběh ostatních vnitřních sil konstrukce lze určit z hodnot $X_i(t)$ podle vztahu (4.6).

Poznámka. Někdy je třeba i při stálém vnějším zatížení řešit část konstrukce pro proměnné zatěžovací členy (např. při řešení složeného průřezu ve staticky neurčité konstrukci nebo konstrukce s časově proměnným předpětím — ztráty). Proměnu zatížení lze pak obvykle vyjádřit lineární nebo exponenciální funkcí. Ukažme proto určení partikulárního řešení pro zatěžovací členy tvaru

$$\delta'_i(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_i} = {}^1\delta'_i + {}^2\delta'_i\overline{\varphi}(t) + {}^3\delta'_i\,\mathrm{e}^{\beta\overline{\varphi}(t)}, \tag{4.17}$$

kde ${}^1\delta'_i$, ${}^2\delta'_i$, ${}^3\delta'_i$, β jsou jisté konstanty. Partikulární řešení systému (4.9) lze hledat ve tvaru [38]

$$X_{i_p}(t) = {}^1X_i + {}^2X_i\overline{\varphi}(t) + {}^3X_i\,\mathrm{e}^{\beta\overline{\varphi}(t)} + {}^4X_i\overline{\varphi}(t)\,\mathrm{e}^{\beta\overline{\varphi}(t)}. \tag{4.17.1}$$

Dosazením do (4.9) obdržíme po porovnání koeficientů u stejných funkcí rovnice

$$\sum_j \delta'_{ij}\,{}^2X_j + {}^2\delta'_i = 0, \tag{4.17.2}$$

$$\sum_j \delta'_{ij}\,{}^1X_j + \sum_j \delta_{ij}\,{}^2X_j + {}^1\delta'_i = 0; \tag{4.17.3}$$

$$\sum_j (\delta_{ij}\beta + \delta'_{ij})\,{}^3X_j + \sum_j \delta_{ij}\,{}^4X_j + {}^3\delta'_i = 0, \tag{4.17.4}$$

$$\sum_j (\delta_{ij}\beta + \delta'_{ij})\,{}^4X_j = 0; \tag{4.17.5}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Konstanty ${}^2X_i$ se vypočtou ze systému rovnic (4.17.2), který je jednoznačně řešitelný, neboť vyjadřuje jistou napjatost transformované konstrukce. Dosazením do (4.17.3) lze pak vypočíst konstanty ${}^1X_i$. Výpočet konstant ${}^3X_i$, ${}^4X_i$ závisí na tom, jakou hodnotu mají kořeny λ_j charakteristické rovnice.

1. Je-li $\lambda_j \neq \beta$ pro všechna j, je determinant $(\delta_{ij}\beta + \delta'_{ij})$ vzhledem k rovnici (4.14) nenulový. Pak z homogenního systému (4.17.5) plyne ${}^4X_i = 0$ pro všechna j, a ${}^3X_i$ se vypočte ze systému lineárních rovnic (4.17.4), který je též řešitelný, neboť jeho determinant je nenulový.

2. Jestliže někdy nastane $\lambda_j = \beta$ pro některé j, splývají konstanty ${}^3X_i$ s konstantami C_i obecného řešení, a mohou tedy být libovolné. Poněvadž determinant $(\delta_{ij}\beta + \delta'_{ij})$ je nulový, musí být aspoň některé ${}^4X_i \neq 0$, neboť jinak by systém rovnic (4.17.4) neměl řešení. Z homogenního systému (4.17.5) plyne ${}^4X_i = C\,{}^1k_i$, kde konstantu C je nutno určit z podmínky, aby systém rovnic (4.17.4) měl vzhledem ke konstantám ${}^2X_i$ řešení, tj. aby jeho rozšířená matice měla hodnost $n - 1$.

Obecné řešení má význam užít pouze u konstrukcí a systémů s menším počtem staticky neurčitých veličin (prakticky jen s jednou až třemi), neboť při větším počtu staticky neurčitých se stává značně pracné. Tam jsou pak vhodnější přibližná řešení (kap. 5).

4.6. Počáteční podmínky

Obecné konstanty $C_1, \ldots, C_n$ se určí podle daných počátečních podmínek $X_i(t_0) = X_{i_0}$ v čase $t = t_0$ $[\overline{\varphi}(t_0) = 0]$, který vyjadřuje počátek spolupůsobení konstrukce jako celku v daném statickém systému. Podle (4.16) jsou dány systémem rovnic

$$\begin{aligned} {}^1k_1C_1 + {}^2k_1C_2 + \ldots + {}^nk_1C_n &= X_{1_0} - X_{1_p},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ {}^nk_1C_1 + {}^nk_2C_2 + \ldots + {}^nk_nC_n &= X_{n_0} - X_{n_p}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Jestliže počáteční stav představuje řešení pružné konstrukce od daného zatížení na definitivním statickém systému, tj. když zatížení bylo zavedeno v čase $t = t_0$ a nikoliv dříve, jsou počáteční hodnoty dány systémem rovnic $\sum_j \delta_{ij}X_{j_0} + \delta_i(t_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. (Pokud však zatížení bylo zavedeno již dříve, je nutno výchozí hodnoty vypočíst s ohledem na dotvarování, nejde-li ovšem o staticky určitý systém.)

Je-li počáteční stav určen nejen vnějším zatížením v čase $t = t_0$, ale jestliže v čase $t = t_0$ byly též provedeny nějaké náhlé rektifikace nebo posuvy podpor a změny teploty, které změnily staticky neurčité hodnoty o ΔX_{i_0}, a pokud byla v čase $t = t_0$ zvýšena statická neurčitost přidáním m staticky neurčitých vazeb $X_{m-n+1}, \ldots, X_n$, pak jsou počáteční hodnoty $X_{i_0} = {}^zX_{i_0} + \Delta X_{i_0}$ pro $i \leqq n - m$ a $X_{i_0} = \Delta X_{i_0}$ pro $i > n - m$, kde ${}^zX_{i_0}$ značí hodnoty

od vnějšího zatížení pro $t = t_0$ na původní statické soustavě $(n - m)$krát staticky neurčité (pro $t < t_0$). Potom ovšem hodnoty $-\sum_j \delta_{ij} X_{j_0}$ jsou různé od hodnot $\delta_i(t_0)$.

Někdy může být při návrhu konstrukce výhodnější požadovat předem, aby po skončení dotvarování pro $t \to \infty$ (nebo v daném čase t_1) vznikly na konstrukci vnitřní síly $X_i(\infty)$ předem dané. Potom lze konstanty $C_1, \ldots, C_n$ určit z rovnic

$$\begin{aligned} {}^1k_1\, e^{\lambda_1 \overline{\varphi}(\infty)}\, C_1 + \ldots + {}^nk_1\, e^{\lambda_n \overline{\varphi}(\infty)}\, C_n &= X_1(\infty) - X_{1_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ {}^1k_n\, e^{\lambda_1 \overline{\varphi}(\infty)}\, C_1 + \ldots + {}^nk_n\, e^{\lambda_n \overline{\varphi}(\infty)}\, C_n &= X_n(\infty) - X_{n_p}. \end{aligned} \tag{4.18a}$$

Výpočtem z rov. (4.16) se pak získají hodnoty $X_i(t_0)$ v počátečním čase $t = t_0$ a rozdíl $\Delta X_{i_0} = X_i(t_0) - {}^zX_{i_0}$ udává síly, jaké je třeba v konstrukci v čase $t = t_0$ ve smyslu staticky neurčitých veličin zavést (lisy, předpětím), aby bylo dosaženo požadovaných konečných hodnot. Můžeme to označit za zpětný postup výpočtu.

U konstrukcí, kde se rektifikují počáteční hodnoty sil (předpětí konstrukce), dosáhne se obvykle nejméně nepříznivých účinků dotvarování a smršťování, jestliže se vypočtou napřed takové vnitřní síly, které jsou nejvýhodnější bez ohledu na dotvarování a smršťování, a pak se počáteční hodnoty, jež je nutno zavést předpětím konstrukce, stanoví tak, aby tyto hodnoty nastaly v čase, kdy $\overline{\varphi}(t)$ je rovno $\frac{1}{2}\overline{\varphi}(\infty)$ (popř. střední hodnotě z doby od začátku provozu do ∞).

U konstrukce s jedinou staticky neurčitou je řešení

$$X_1(t) = X_{1_p}(t) + [X_{1_0} - X_{1_p}(t_0)]\, e^{-(\delta'_{11}/\delta_{11})\overline{\varphi}(t)} \tag{4.19}$$

nebo ([38], str. 690, rov. 5) jinak

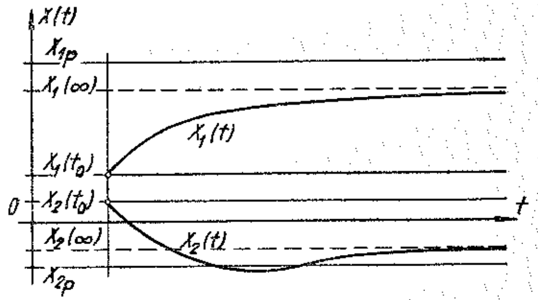
$$X_1(t) = X_{1_0} - \frac{1}{\delta_{11}}\, e^{-(\delta'_{11}/\delta_{11})\overline{\varphi}} \int_0^{\overline{\varphi}} \left(\delta'_1 + \frac{d\delta_1}{d\overline{\varphi}} + \delta'_{sm_1}\right) e^{(\delta'_{11}/\delta_{11})\overline{\varphi}}\, d\overline{\varphi}. \tag{4.19a}$$

Poznámka. U konstrukce provedené monoliticky je nejasná správná volba t_0 při spolupůsobení konstrukce již od zatuhnutí, jíž by se nejlépe vyjádřilo to, že modul E je v prvém měsíci značně menší a proměnný. Z tohoto hlediska je vhodné pro účinky nehomogenity a smršťování volit asi $t_0 = 14$ dní až 1 měsíc, i když podle (2.1) by to mělo být několik hodin. Pro určení deformace po odskružení nebo účinku posuvu podpor je však třeba dosadit vždy skutečné t_0 (nebo pro $t_0 < 1$ měsíc lépe i menší než skutečné).

4.7. Některé vlastnosti řešení a příklady

Z fyzikálního významu rovnic (4.9) je zřejmé, že při stálém zatížení nemá řešení periodické složky a že pro teoretický případ $\varphi \to \infty$ musí mít limitu. Z toho plyne, že všechny kořeny λ_j charakteristické rovnice musí být reálné a záporné (matematicky viz [38], str. 685), není-li ovšem konstrukce výjimkovým případem, kdy aspoň jeden kořen je nulový (a naopak).

Při konstantním zatížení i teplotě a neposuvnosti podpor je pro $\varphi \to \infty$ $\lim X_i = X_{i_p}$. Z výrazu (4.16) je vidět, že křivky průběhu $X_i(t)$ nebo $M(t)$ mohou mít nejvýše $n - 1$ vrcholů (lokálních extrémů). Je-li pouze jediná staticky neurčitá, tj. $n = 1$, je $X_i(t)$ monotonní funkcí $\varphi(t)$, jakož i t, a platí $X_{i_0} \lesseqgtr X_i(t) \lesseqgtr X_i(\infty) \lesseqgtr X_{i_p}$. Většinou to však platí i v ostatních případech (obr. 4.1).



Obr. 4.1. Příklad průběhu vnitřních sil

Řešení v daném čase t_1 závisí pouze na hodnotě $\varphi(t_1)$, nezávisí však na průběhu $\varphi(t)$ jako funkce času v intervalu (t_0, t_1). Řešení dále nezávisí na volbě počátku času t, jak plyne ostatně již z toho, že v rov. (2.16) definující $\varkappa$ je volba počátku $t = 0$ libovolná. Je to patrné i z rov. (4.16); součin $\delta'_{ij}\overline{\varphi}(\infty)$ je totiž nezávislý na volbě t_0 při daných $t_{0(\varkappa)}$, neboť δ'_{ij} je podle rov. (2.16) a (4.7) nepřímo úměrné $\overline{\varphi}(\infty)$. Z charakteristické rovnice (4.14) je vidět, že λ je úměrné δ'_{ij}, takže též součiny $\lambda_i\overline{\varphi}(\infty)$ jsou nezávislé. Partikulární hodnoty X_{i_p} jsou dále též nezávislé, neboť hodnoty δ'_{ij}, δ'_i, δ'_{sm_i} se při změně t_0 mění ve stejném poměru. Podle rov. (4.18) též součiny ${}^jk_iC_j$ jsou nezávislé na volbě ${}^jk_1$.

Řešení lze vyjádřit ve tvaru (4.16), jen když zatížení a posuvy podpor jsou spojitě proměnné. Není-li tomu tak, je nutno buď řešit každý časový úsek se spojitým průběhem zatížení zvlášť, nebo užít principu superpozice, který platí i pro zatížení zavedená obecně v různých časech (podle předpokladů kap. 2).

Poznámka. Tak např. jestliže k zatížení Z zavedenému v čase t_0 přistoupilo v čase $t_0^* > t_0$ další zatížení Z^* nebo jestliže vznikly náhlé posuvy podpor a změny teploty, platí podle principu superpozice pro $t \geqq t_0^*$:

$$X_i(t) = X_{i_p} + \sum_j C_i\,{}^jk_i\,e^{\lambda_j[\varphi(t)-\varphi(t_0)]} + X_{i_p}^* + \sum_j C_i^*\,{}^jk_i\,e^{\lambda_j[\varphi(t)-\varphi(t_0^*)]},$$

kde $X_{i_p}^*$, C_i^* jsou hodnoty odpovídající Z^*. Snadno lze se přesvědčit, že tento výraz je totožný s výrazem

$$X_i(t) = (X_{i_p} + X_{i_p}^*) + \sum_j \left(C_i\,e^{\lambda_j[\varphi(t_0^*)-\varphi(t_0)]} + C_i^*\right){}^jk_i\,e^{\lambda_j[\varphi(t)-\varphi(t_0^*)]}$$

odpovídajícím rozdělení řešení na časové úseky o spojitém celkovém zatížení.

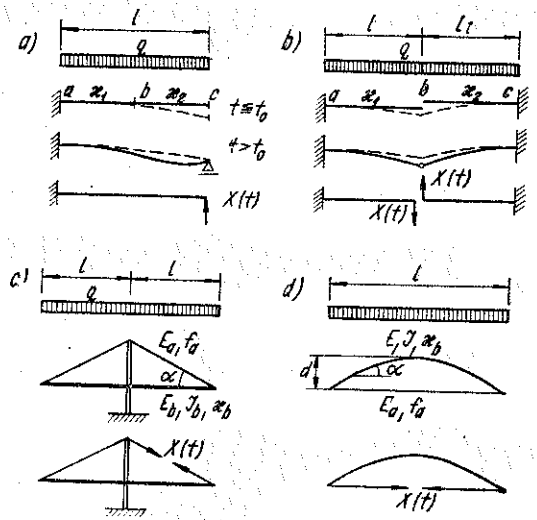
Příklad 4.7.1

a) Uvažujeme *vetknutou konzolu abc o* $J = konst$ (obr. 4.2a). Nechť beton je v úseku *ab* stejně starý, stejně tak i v *bc* a v úseku *ab* starší než v *bc*. Nechť konzola je zatížena rovnoměrným zatížením q a nechť konec c je v čase t_0 uložen na pevnou podporu, kde vzniká reakce $X(t)$. Koeficienty afinity dotvarování úseků *ab*, *bc* označme $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Řešení vypadá takto:

$$\delta_{XX} = l^3/3EJ,\quad \delta'_{XX} = (7\varkappa_1 + \varkappa_2)\,l^3/24EJ,$$
$$\delta'_X = -(15\varkappa_1 + \varkappa_2)\,ql^4/128EJ;\quad X_0 = 0,$$
$$X_p = -\delta'_X/\delta'_{XX} = \tfrac{3}{16}ql(15\varkappa_1 + \varkappa_2)/(7\varkappa_1 + \varkappa_2),\quad \lambda = -\tfrac{1}{8}(7\varkappa_1 + \varkappa_2).$$

Podle toho je

$$X(t) = \frac{15\varkappa_1 + \varkappa_2}{7\varkappa_1 + \varkappa_2}(1 - e^{\lambda\bar{\varphi}})\,\tfrac{3}{16}ql.$$



Obr. 4.2.

Je-li úsek *ab* o 4 měsíce starší než *bc*, $\varkappa_2 = 1$ a čas zavedení podpory je $t_0 = 1$ měsíc, je $\bar{\varphi} = 2{,}00$, $\varkappa_1 = 0{,}622$, $X(\infty) = 1{,}426\,\tfrac{3}{16}ql$. Je-li úsek *ab* z oceli, tj. $\varkappa_1 \doteq 0$, vyjde $X(\infty) = 0{,}222\,\tfrac{3}{16}ql$.

Poznámka. Kdyby bylo $\varkappa = a - bx$ proměnné se vzdáleností x od konce c, vyšlo by obdobně: $X_p = \tfrac{3}{10}ql(5a - 4bl)/(4a - 3bl)$, $\lambda = -\tfrac{3}{40}ql(5a - 4bl)$.

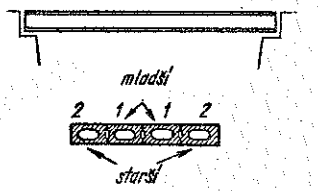
b) Dále řešme *dvojici vetknutých vstřícných konzol ab* a *cb* o $J = konst$ podle obr. 4.2b. Stáří každé konzoly je stejné, avšak mezi konzolami navzájem různé, což je vyjádřeno koeficienty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Konzoly jsou jako volné zatíženy zatížením q a v čase t_0 jsou spojeny kloubem. Určí se $\delta_{XX} = 2l^3/3EJ$, $\delta'_{XX} = (\varkappa_1 + \varkappa_2)\,l^3/3EJ$, $\delta'_X = -(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,ql^4/8EJ$; $X_0 = 0$, $X_p = \tfrac{3}{8}ql(\varkappa_1 - \varkappa_2)/(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, $\lambda = -\tfrac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2)$. Výsledek je

$$X(t) = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}(1 - e^{\lambda\bar{\varphi}})\,\tfrac{3}{8}ql.$$

Je-li konzola *ab* o 4 měsíce starší než *bc*, $\varkappa_2 = 1$, $t_0 = 1$ měsíc, $\bar{\varphi}(\infty) = 2{,}00$ $\varkappa_1 = 0{,}622$, je $X(\infty) = 0{,}187\,\tfrac{3}{8}ql$. Je-li konzola *ab* z oceli, tj. $\varkappa_1 \doteq 0$, je $X(\infty) = 0{,}633\,\tfrac{3}{8}ql$.

c) Řešení *dvojice zavěšených konzol* podle obr. 4.2c je dáno koeficienty $\delta_{XX} = (l^3/3EJ)\sin^2\alpha + l/E_af_a\cos\alpha$, $\delta'_{XX} = \varkappa_b(l^3/3EJ)\sin^2\alpha$, $\delta'_X = \varkappa_b ql^4/8EJ$, $\delta'_{sm_X} = \varkappa_b l\cos\alpha\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

d) Pro *dvojkloubový parabolický oblouk s táhlem* o proměnném $J = J_0/\cos\alpha$ podle obr. 4.2d je $\delta_{XX} = \tfrac{8}{15}f^2l/EJ_0 + l/E_af_a$, $\delta'_{XX} = \tfrac{8}{15}f^2\varkappa_b l/EJ_0$, $\delta'_X = \varkappa_b ql^3/15EJ_0$, $\delta'_{sm_X} = l\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.



Obr. 4.3.

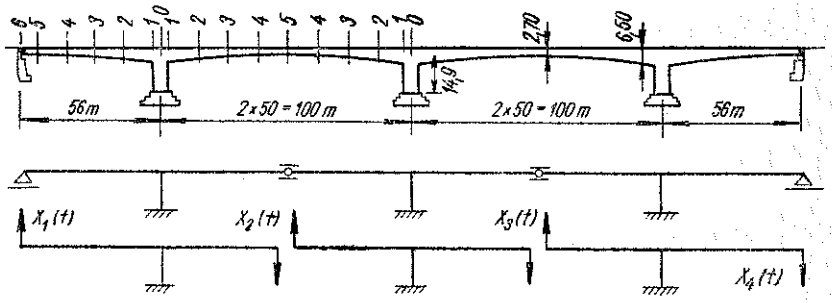
Příklad 4.7.2. Uvažujme rošt podle obr. 4.3, tvořený čtyřmi shodnými betonovými prefabrikovanými nosníky, z nichž dva střední nosníky jsou mladší než nosníky krajní, což je vyjádřeno hodnotami $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Nechť každý nosník má stálé zatížení (včetně předpětí) tvaru $q(x)$. Spára mezi nosníky je zabetonována. Příčný řez roštu pokládejme přibližně za absolutně tuhý. Mezi krajním a středním nosníkem vzniká posouvající síla $X(x, t) = X_0(t)\,q(x)$, neboť $X(x, t)$ působí na každý nosník shodně jako $q(x)$. Proto lze úlohu považovat za jedenkrát staticky neurčitou se staticky neurčitou veličinou $X_0(t)$.

Nechť pružný průhyb jednoho nosníku od zatížení $q(x)$ je $\delta(x)$. Pak platí $\delta'_X = (\varkappa_2 - \varkappa_1)\,\delta(x)$, $\delta_{XX} = 2\delta(x)/q(x)$, $\delta'_{XX} = (\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\delta(x)/q(x)$. Odtud plyne $X_p = q(x)\,.\,(\varkappa_1 - \varkappa_2)/(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, $\lambda = -\tfrac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, takže výsledek je $X(x, t) = q(x)\,(1 - e^{\lambda\bar{\varphi}})\,(\varkappa_1 - \varkappa_2)/(\varkappa_1 + \varkappa_2)$.

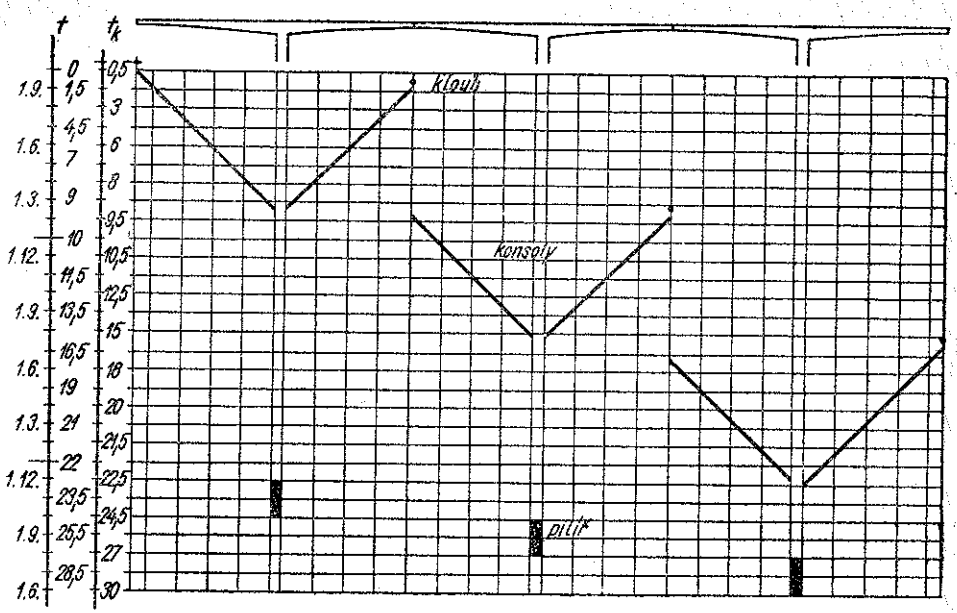
Je-li $\Delta t = 4$ měsíce a $t_0 = 1$ měsíc, $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 0{,}622$, $\bar{\varphi}(\infty) = 2$, je $X(\infty) = 0{,}187q(x)$. Pro $\varkappa_2 = 0$ je $X(\infty) = 0{,}865q(x)$. Vidíme, že rozdíl stáří nosníků v roštu může vyvolat velké změny momentu. U předpjatých nosníků mimoto vznikají též přesuny předpětí mezi nosníky.

Příklad 4.7.3. Uvažujme letmo betonovaný most podle obr. 4.4, komůrkového průřezu, z předpjatého betonu. U mostů tohoto typu bývají konzoly

proměnného stáří a navzájem různě staré. Ve vnitřním poli by mladší konzola od daného času t_0 měla větší průhyby než starší konzola, takže spojením konzol musí vzniknout posouvající síla $X_2(t)$. Krajní pole se vybetonuje jako konzola a teprve potom se uloží její konec na opěru. Tím je bráněno dlouhodobým průhybům této konzoly, takže zde vznikne reakce $X_1(t)$. Na obr. 4.5 je znázorněn předpokládaný harmonogram betonování pilířů a konzol s redukcí času podle ročních dob. Pro výpočet budeme předpokládat, že klouby se



Obr. 4.4.



Obr. 4.5.

uzavřou současně a že stálé zatížení je od tohoto okamžiku neměnné. Zvolí se střední stáří $t_0 = 7$ měsíců a určí se $\overline{\varphi}(\infty) = 4(1 - 0{,}731) = 1{,}08$. Konzoly se rozdělí na dílky (obr. 4.4) a pro jednotlivé průřezy a pilíře se určí odpovídající hodnoty $\varkappa$. Vzhledem k poměrně tuhým pilířům lze levou část mostu uvažovat přibližně jako 2krát staticky neurčitou se staticky neurčitými X_1, X_2.

Z předcházejícího výpočtu pružného chování konstrukce jsou k dispozici hodnoty $\delta_{11} = 5{,}13 \cdot 10^{-4}$ m/Mp, $\delta_{12} = 0{,}54 \cdot 10^{-4}$ m/Mp, $\delta_{22} = 6{,}56 \cdot 10^{-4}$ m/Mp (zahrnující i pružnost vetknutí základu). Dále se s ohledem na koeficienty $\varkappa$ výpočtem příslušných integrálů podle Simpsonova pravidla určí hodnoty $\delta'_{11} = 5{,}70 \cdot 10^{-4}$ m/Mp, $\delta'_{12} = 0{,}22 \cdot 10^{-4}$ m/Mp, $\delta'_{22} = 5{,}64 \cdot 10^{-4}$ m/Mp, $\delta'_{sm_1} = \delta'_{sm_2} = 0$. (Přitom se buď přibližně předpokládá, že složený předpjatý průřez se ohýbá stejně jako nevyztužený beton, nebo se přesněji zavede náhradní $\varkappa_M$ pro složený průřez podle odst. 6.6. a místo $\varkappa$ se pak uvažuje $\varkappa_M$.)

Při určení absolutních členů od zatížení je nutno vzít v úvahu, že v průřezech se momenty od předpětí odečítají od momentů od vlastní váhy, takže vliv časové proměny předpětí i jeho odchylky od teoretické hodnoty je značný. Proto je nutno jednak uvažovat vliv časové proměny předpětí $S(t)$, a zároveň posoudit konstrukci pro obě krajní možné hodnoty, tj. dvakrát (přibližně pro $0{,}95S(t)$ a pro $1{,}05S(t)$].

Zde provedeme pouze jeden výpočet. V průřezech se vypočtou hodnoty předpětí S_0 v čase t_0 a S_∞ pro $t \to \infty$. K nim se vypočtou celkové momenty od předpětí a stálého zatížení na základní soustavě a z nich se pro transformovanou konstrukci s moduly $E' = E/\varkappa$ určí vyčíslením příslušných integrálů hodnoty $\delta'_{1_0} = -400 \cdot 10^{-4}$ m, $\delta'_{2_0} = -322 \cdot 10^{-4}$ m. Dále se určí hodnoty $\delta_{1_\infty} - \delta_{1_0} = -162 \cdot 10^{-4}$ m, $\delta_{2_\infty} - \delta_{2_0} = 0$, popř $\delta'_{1_\infty} - \delta'_{1_0} = -202 \cdot 10^{-4}$ m, $\delta'_{2_\infty} - \delta'_{2_0} = 42 \cdot 10^{-4}$ m, které odpovídají změnám předpětí od času t_0 do ∞ (vlivem dotvarování a smršťování v průřezech) na dané, popř. transformované konstrukci. Absolutní členy lze pak předpokládat přibližně s průběhem ${}^1\delta'_i + {}^2\delta'_i\overline{\varphi}$, který je pro $i = 1 \ldots (-400 - \overline{\varphi} \cdot 202/1{,}08 - 162/1{,}08) \cdot 10^{-4} = (-550 - 187\overline{\varphi}) \cdot 10^{-4}$ m, pro $i = 2 \ldots (-322 + \overline{\varphi} \cdot 42/1{,}08 + 0) \cdot 10^{-4} = (-322 + 39\overline{\varphi}) \cdot 10^{-4}$ m.

Nyní vypočteme ${}^1X_{1_p}(t)$. ${}^1X_{2_p}(t)$ podle (4.17.2-3)

$$\left.\begin{aligned} 0{,}570\,{}^2X_1 + 0{,}22\,{}^2X_2 - 187 = 0, \quad \ldots {}^2X_1 = 32{,}5 \text{ Mp}, \\ 0{,}22\,{}^2X_1 + 5{,}64\,{}^2X_2 - 39 = 0; \quad\quad {}^2X_2 = 5{,}6 \text{ Mp}; \end{aligned}\right\}$$

$$5{,}70\,{}^1X_1 + 0{,}22\,{}^1X_2 - 550 + 5{,}13 \cdot 32{,}5 + 0{,}54 \cdot 5{,}6 = 0;$$

$$0{,}22\,{}^1X_1 + 5{,}64\,{}^1X_2 - 322 + 0{,}54 \cdot 32{,}5 + 6{,}56 \cdot 5{,}6 = 0;$$

$$^1X_1 = 67{,}8 \text{ Mp},$$
$$^1X_2 = 44{,}6 \text{ Mp}.$$
. . . . . .

Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 5{,}13\lambda + 5{,}70, & 0{,}54\lambda + 0{,}22 \\ 0{,}54\lambda + 0{,}22, & 6{,}56\lambda + 5{,}64 \end{vmatrix} = 0$$

neboli $33{,}4\lambda^2 + 66{,}1\lambda + 32{,}1 = 0$; $\lambda_1 = -1{,}12$, $\lambda_2 = -0{,}85$. Dále volíme $^1k_1 = -\delta_{22}\lambda_1 - \delta'_{22} = 1{,}71$, $^2k_1 = -\delta_{12}\lambda_1 - \delta'_{12} = 0{,}237$. Odpovídající hodnoty jsou $^1k_2 = \delta_{12}\lambda_1 + \delta'_{12} = -0{,}383$, $^2k_2 = \delta_{11}\lambda_2 + \delta'_{11} = 1{,}34$.

Obecné řešení tedy je $X_1(t) = 67{,}8 + 32{,}5\overline{\varphi} + 1{,}71C_1\,e^{\lambda_1\overline{\varphi}} + 0{,}237C_2\,e^{\lambda_2\overline{\varphi}}$, $X_2(t) = 44{,}6 + 5{,}6\overline{\varphi} - 0{,}383C_1\,e^{\lambda_1\overline{\varphi}} + 1{,}34C_2\,e^{\lambda_2\overline{\varphi}}$ [Mp]. Počáteční hodnoty vzniklé zavedením stálého zatížení po uzavření kloubů byly určeny na $X_{1_0} = 163$ Mp, $X_{2_0} = -9{,}1$ Mp. Odtud lze vypočíst

$$1{,}71C_1 + 0{,}237C_2 = -67{,}8 + 163, \ldots \quad C_1 = 59{,}0 \text{ Mp},$$
$$-0{,}383C_1 + 1{,}34C_2 = -44{,}6 - 9{,}1; \quad C_2 = -23{,}7 \text{ Mp}.$$

Dosazením pro $\overline{\varphi}(\infty) = 1{,}08$ obdržíme výsledek $X_1(\infty) = 131$ Mp, $X_2(\infty) = 31$ Mp.

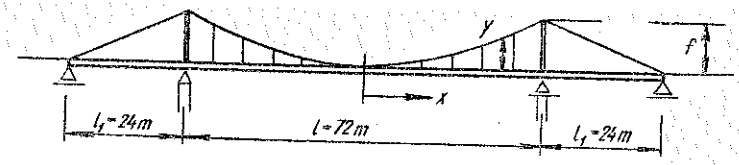
Poznámka. Téměř stejné hodnoty bychom získali přibližným vzorcem (5.34), který zde lze dobře použít pro poměrně značnou tuhost pilířů, pro níž jsou δ_{12}, δ'_{12} malá. Dále by bylo třeba výpočet opakovat pro druhé krajní možné hodnoty předpětí. To však již neprovedeme.

K představě o velikosti účinků uveďme, že větší z obou změn reakce max X_1 včetně nahodilého zatížení je — 11 %, min X_1 ... — 60 %, max X_2 ... + 21 %, min X_2 ... — 17 %, změna momentu (včetně nahodilého zatížení) v líci pilíře vnitřního pole +3,3 % a krajního pole +7 %, změna momentu v pilíři 8 %.

Poznámka. U mostu letmo betonovaného s poddajnějšími pilíři jsou účinky dotvarování značně menší. Je to vidět na výsledcích získaných z výpočtu jiného silničního mostu téhož systému o polích 48 + 96 + 48 m a pilířích výšky 30 m. Časová změna max X_1 vyšla 2,9 %, změna min X_1 ... 5 %, změna max X_2 ... 4,4 %, změna momentu v líci pilíře 0,6 % a změna M v pilíři 3,7 %.

Příklad 4.7.4. Visutý betonový trámový most podle obr. 4.6 se závěsným lanem tvaru paraboly. Jedná se o spojitý nosník předpjatý jedním volným kabelem. Vodorovné složky kotevních tlaků ocelového lana přejímá železobetonový trám, který je jimi částečně předepjat. Předpětí činí však pouze

asi —6 kp/cm², takže trám se chová v ohybu prakticky jako železobetonový nosník (odst. 6.9, $\varkappa_{Mb} = \frac{1}{4}$). V době $t_0 = 3$ měsíce ($\overline{\varphi}(\infty) = 4(1 - 0{,}627) = 1{,}49$) po vybetonování trámu a zavedení veškerého stálého zatížení je lano předepnuto na počáteční vodorovnou sílu $H(t_0) = 1020$ Mp, která se pak



Obr. 4.6.

zmenšuje vlivem dotvarování a smršťování trámu. Pro lano je $F_a = 0{,}0125$ m², pro trám je $F_b = 16{,}8$ m², $J_b = 3{,}60$ m⁴. Stálé zatížení činí $g = 13{,}0$ Mp/m' (z toho vlastní váha trámu 9,0 Mp/m').

Řešení provedeme podle teorie 1. řádu. Základní soustavu vytvoříme uvolněním vodorovné síly kabelu $H(t)$. Je dvakrát staticky neurčitá (spojitý nosník), což je přípustné, neboť části, z nichž se skládá, jsou homogenní a mohou se volně smršťovat.

Kabel vyvozuje ve středním poli rovnoměrné zatížení $g_H = -8fH/l^2$. Snadno lze určit $\delta_{HH} = L/E_aF_a + L/E_bF_b + \int_{-l/2}^{l/2} \{(1 + z'^2)^{\frac{1}{2}} - [1 + (z' - w'_H)^2]^{\frac{1}{2}}\}\,dx \doteq L/E_aF_a + L/E_bF_b + \int_{-l/2}^{l/2} z'w'_H\,dx$, kde w_H značí průhyb spojitého nosníku od rovnoměrného zatížení $-8f/l^2$ ve středním poli. Pro parabolu lana je zřejmě $z' = 8fx/l^2$. Moment nad podporou spojitého nosníku pod rovnoměrným zatížením g_H ve středním poli je $\frac{1}{8}(0{,}455 - 1)\,g_Hl^2$, odkud lze odvodit $w'_H = (g_Hl^2/8EJ)(0{,}455x - 4x^3/3l^2)$. Integrací plyne $\delta_{HH} = L/E_aF_a + L/E_bF_b + 0{,}170f^2l/E_bJ_b = 5{,}95 \cdot 10^{-4}$ m/Mp.

Koeficient δ'_{HH} se určí záměnou $1/E_b$ za $\varkappa_{Mb}/E_b \doteq 1/4E_b$ a $1/E_a$ za $\varkappa_a/E_a = 0$. Je tedy $\delta'_{HH} = L/E_bF_b + \frac{1}{4}\,0{,}170f^2l/E_bJ_b = 0{,}240 \cdot 10^{-4}$ m/Mp.

Moment nad podporou samostatného spojitého nosníku se rovná $\frac{1}{8}(0{,}354 - 1)\,gl^2$, odkud lze odvodit pro ohybovou čáru $w(x)$ ve středním poli tohoto spojitého nosníku od rovnoměrného zatížení g, že $w' = (gl^2/8EJ)(0{,}354x - 4x^3/3l^2)$. Potom je $\delta'_H \doteq \varkappa_b \int_{-l/2}^{l/2} z'w'\,dx \doteq \frac{1}{4}\,0{,}128fl^3/E_bJ_b = -112 \cdot 10^{-4}$ m.

Od smrštění je $\delta'_{sm_H} = -L\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) = -\frac{1}{4}\,120(-0{,}0003) = 90 \cdot 10^{-4}$ m.

Z těchto koeficientů lze určit $H_p = -(\delta'_H + \delta'_{sm_H})/\delta'_{HH} = 92$ Mp, $\lambda = -\delta'_{HH}/\delta_{HH} = -0{,}0403$. Výsledek je $H(\infty) = 1020 + (92 - 1020)(1 - e^{-0{,}0403 \cdot 1{,}49}) = 966$ Mp, $\Delta H = -54$ Mp. (Kdyby byl železobetonový nosník plně předpjat pomocí dalších kabelů, byla by ztráta vodorovné síly závěsného lana mnohem větší.)

4.8. Homogenní konstrukce

Obecné řešení bylo již podáno v kapitole 3.4. Ukažme však, že tytéž výsledky pro konstrukci plynou i z rov. (4.9). Je-li $\varkappa \equiv 1$ a $\mu' = \mu$, platí zřejmě $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ a transformovaná konstrukce se ztotožní s danou. Při konstantním zatížení, neposuvnosti podpor a stálé teplotě je partikulární řešení rovno řešení na dané konstrukci pro dané vnější stálé zatížení a poměrná smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ podle teorie pružnosti (bez vlivu posuvu podpor a změny teploty v čase t_0). Odečteme-li rovnice (4.15) pro partikulární řešení od přetvárných rovnic (4.9), dostaneme homogenní systém lineárních rovnic $\sum_j \delta_{ij}(\mathrm{d}X_j/\mathrm{d}\varphi + X_j - X_{j_p}) = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, z nějž plynou rovnice (determinant $(\delta_{ij}) \neq 0$):

$$\frac{\mathrm{d}X_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} + X_i(t) = X_{i_p} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.20}$$

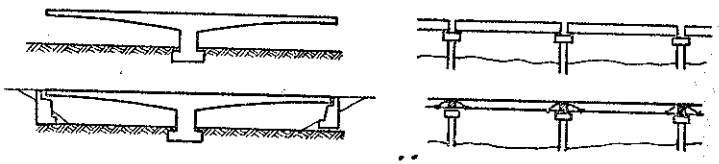
Totéž plyne také přímo z rovnic (4.10), neboť $[A_{ij}] = -[\delta_{ik}]^{-1}[\delta_{kj}] = -[\mathbf{1}]$, $[B_i] = -[\delta'_{ij}]^{-1}[\delta_j + \delta'_{sm_j}] = -[X_{i_p}]$.

Diferenciální rovnice (4.20) mají řešení

$$X_i(t) = X_{i_p} + (X_{i_0} - X_{i_p})\, e^{-\overline{\varphi}(t)} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4.21}$$

kde X_{i_0} vyjadřuje počáteční podmínky s ohledem na původní statický systém, náhlé posuvy podpor, rektifikace a změny teploty. Při smršťování rozdíl $X_{i_p} - X_{i_0}$ představuje účinek poměrných smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ na dané konstrukci, vypočtený podle teorie pružnosti; účinek smršťování v čase t se obdrží, násobí-li se tento rozdíl funkcí $1 - e^{-\overline{\varphi}(t)}$. Při změně statického působení (obr. 4.7) v čase t_0 rozdíl $X_{i_p} - X_{i_0}$ vyjadřuje rozdíl mezi vnitřními silami vypočtenými podle teorie pružnosti pro dané vnější zatížení, jako kdyby konstrukce byla postavena monoliticky, a vnitřními silami pro totéž zatížení na původním statickém systému v čase $t \to t_0\,(t < t_0)$; tento rozdíl je třeba též násobit $1 - e^{-\overline{\varphi}(t)}$. Při náhlém posuvu podpor nebo změně teploty

v čase t_0 rozdíl $X_{i_0} - X_{i_p}$ představuje účinek posuvu podpor podle teorie pružnosti; tento rozdíl se redukuje podle funkce $e^{-\overline{\varphi}(t)}$ (relaxace napětí). Je-li vliv smršťování nulový, nevzniknou-li posuvy podpor a změny teploty a ne-



Obr. 4.7. **Příklady změny statického působení**

dojde-li ke změně statického systému, nemá u homogenního tělesa při $\mu' = \mu$ dotvarování žádný vliv na vnitřní síly. To však prakticky nastává pouze u tradičních betonových konstrukcí.

Je-li zatížení proměnné a probíhají-li časové posuvy podpor a změny teploty, je řešení dáno obecnějšími nezávislými rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}X_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} + X_i(t) = \frac{\mathrm{d}X_{i_z}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + X_{i_z}(t) + \frac{\mathrm{d}X_{i_a}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + X_{i_{sm}}, \tag{4.20a}$$

kde $X_{i_z}(t)$, popř. $X_{i_a}(t)$, popř. $X_{i_{sm}}$ značí vnitřní síly, jež by odpovídaly podle teorie pružnosti vnějšímu zatížení v čase t (na definitivním statickém systému), popř. posuvu podpor a teplotě v čase t, popř. poměrným smrštěním $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Tyto vnitřní síly jsou dány systémy rovnic

$$\sum_j \delta_{ij}(X_{j_z} + X_{j_a}) + \delta_i = 0, \quad \sum_j \delta_{ij}(X_{j_z} + X_{j_{sm}}) + \delta'_i + \delta'_{sm_i} = 0.$$

Dosadí-li se z těchto rovnic za absolutní členy do rov. (4.9) pro homogenní těleso ($\varkappa = 1$), obdrží se homogenní rovnice

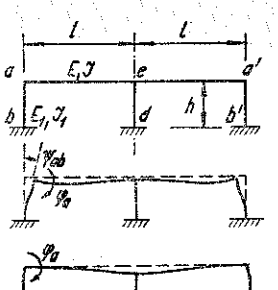
$$\sum_j \delta_{ij}(\mathrm{d}X_j/\mathrm{d}\varphi + X_j - \mathrm{d}X_{j_z}/\mathrm{d}\varphi - X_{j_z} - \mathrm{d}X_{j_a}/\mathrm{d}\varphi - X_{j_{sm}}) = 0,$$

z nichž plyne (4.20a). Řešení je

$$X_i(t) =$$

$$= X_{i_z}(t) + [(X_{i_0} - X_{i_z}(t_0)]\, e^{-\overline{\varphi}(t)} + X_{i_{sm}}(1 - e^{-\overline{\varphi}(t)}) + e^{-\overline{\varphi}(t)} \int_{t_0}^{t} e^{\overline{\varphi}(\tau)}\, \mathrm{d}X_{i_a}(\tau). \tag{4.21a}$$

Vnitřní síly vyvolané proměnným vnějším zatížením zavedeným na definitivní statické soustavě nezávisí na dotvarování a lze je vypočíst podle teorie pružnosti. Poslední výraz plyne též z (4.21) užitím principu superpozice.



Obr. 4.8.

Příklad 4.8.1. Vypočteme účinek smršťování u sdruženého symetrického rámu z předpjatého betonu podle obr. 4.8 pro $\varphi(\infty) = 4$, $\varepsilon_{sm}(\infty) = -3 \cdot 10^{-4}$. Pro $t_0 = 14$ dní je $\overline{\varphi}(\infty) = 2{,}31$. Při řešení deformační metodou stačí vzhledem k symetrii za neznámou volit pootočení φ_a. Nechť je $EJ = 1{,}250 \cdot 10^5$ Mpm², $E_1J_1 = 0{,}630 \cdot 10^5$ Mpm², $l = 10{,}0$ m, $h = 4{,}0$ m; $2EJ/l = 0{,}250 \cdot 10^5$ Mpm, $2E_1J_1/l = 0{,}315 \cdot 10^5$ Mpm.

Napřed řešíme účinek smrštění $-3 \cdot 10^{-4}/4$ na pružném rámu. Pootočení stojky ab činí $\psi_{ab} = (3 \cdot \cdot 10^{-4}/4)\ 10{,}0/4{,}0$, takže styčníková rovnice je $2\varphi_a (0{,}250 + 0{,}315)\ 10^5 - 3(3 \cdot 10^{-4}/4)\ (10{,}0/4{,}0)\ 0{,}315 \cdot 10^5 = 0$. Odtud plyne $2\varphi_a = 3{,}14 \cdot 10^{-4}$. Partikulární řešení je $M_{ab_p} = 0{,}250 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} = 7{,}85$ Mp m. Výsledek je $M_{ab\infty} = -M_{ac\infty} = 2M_{ba\infty} = -2M_{ca\infty} = 7{,}85\,(1 - e^{-2{,}31}) = 7{,}12$ Mp m.

Dále řešme účinek *náhlého poklesu* střední *podpory* o 0,01 m v čase $t_0 = 6$ měsíců, $\overline{\varphi}(\infty) = 1{,}15$. Styčníková rovnice u pružného rámu zní $2\varphi_a(0{,}250 + 0{,}315)\ 10^5 - 3(0{,}01/10{,}0)\ 0{,}315 \cdot 10^5 = 0$. Výsledná hodnota je $M_{ab\infty} = -M_{ac\infty} = 2M_{ba\infty} = -2M_{ca\infty} = -52{,}7\ e^{-1{,}15} = -16{,}7$ Mp m.

4.9. Výpočet deformace konstrukce

Deformace staticky neurčité konstrukce je dána rovnicí (4.5). Vypočteme nyní její členy $\delta_{el_X}(t)$ a $\delta'_X(t)$ na základě známého již průběhu staticky neurčitých veličin $X_i(t)$. Označme napřed

$$\bar{\delta}_X(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}\mathfrak{M}(t)}{EJ} + \frac{\overline{N}\mathfrak{N}(t)}{EF} + \dots\right) \mathrm{d}x + \int_0 (\overline{M}\alpha\Theta' + \overline{N}\alpha\Theta)\ \mathrm{d}x,$$

$$\delta'_X(t) = \int_0 \left(\frac{\overline{M}\mathfrak{M}(t)}{E'J} + \frac{\overline{N}\mathfrak{N}(t)}{E'F} + \dots\right) \mathrm{d}x, \qquad (4.22)$$

$$\bar{\delta}_{ix} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}\overline{M}_i}{EJ} + \frac{\overline{N}\overline{N}_i}{EF} + \dots\right) \mathrm{d}x, \quad \bar{\delta}'_{ix} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}\overline{M}_i}{E'J} + \dots\right) \mathrm{d}x,$$

$$\bar{\delta}'_{X_p} = \int_0 \left(\frac{\overline{M}M_p}{E'J} + \frac{\overline{N}N_p}{E'F} + \dots\right) \mathrm{d}x.$$

Dosazením (4.6) do výrazů (4.4) se získá při tomto označení

$$\delta_{el_X}(t) = \bar{\delta}_X(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}_{ix} X_i(t),\ \delta'_X(t) = \bar{\delta}'_X(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}'_{ix} X_i(t). \qquad (4.23)$$

Deformaci $\delta_X(t)$ ve smyslu veličiny X lze pak psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\delta_X(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\delta_{el_X}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_X(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}'_{ix} X_i(t) + \delta'_{sm_X} \qquad (4.24)$$

nebo též ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\delta_X(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\delta_{el_X}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{X_p} + \delta'_{sm_X} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}'_{ix}[X_i(t) - X_{i_p}]. \qquad (4.25)$$

Integrováním se při konstantním zatížení získá

$$\delta_X(t) = \delta_{el_X}(t) + (\bar{\delta}'_X + \delta'_{sm_X})\,\overline{\varphi}(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}'_{ix} \int_{t_0}^{t} X_i(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau), \qquad (4.26)$$

$$\delta_X(t) = \delta_{el_X}(t) + (\delta'_{X_p} + \delta'_{sm_X})\,\overline{\varphi}(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}'_{ix} \int_{t_0}^{t} [X_i(\tau) - X_{i_p}]\,\mathrm{d}\varphi(\tau). \qquad (4.27)$$

Dosadí-li se do rovnice (4.27) z výrazů (4.16) pro obecné řešení, získá se přímé vyjádření průběhu deformace ve tvaru exponenciálních funkcí $\varphi(t)$. Poměrně jednoduché je pro jedenkrát staticky neurčitou konstrukci s konstantním zatížením, kde platí

$$\delta_X(t) = \delta_{el_X}(t) + (\delta'_{X_p} + \delta'_{sm_X})\,\overline{\varphi}(t) + \\ + \bar{\delta}'_{1x}\left[X_{1_p}\overline{\varphi}(t) + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{\lambda\overline{\varphi}(t)})(X_{1_p} - X_{1_0})\right], \qquad (4.28)$$

$$\delta_X(t) = \delta_{el_X}(t) + (\delta'_{X_p} + \delta'_{sm_X})\,\overline{\varphi}(t) + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{\lambda\overline{\varphi}(t)})[\delta'_{X_p} - \delta_{el_X}(t_0)]. \qquad (4.29)$$

Pro homogenní konstrukci s konstantním zatížením plyne z poslední rovnice vztah ($\varkappa = 1$, $\mu' = \mu$):

$$\delta_X(t) = \delta_{el_X}(t) + (\delta'_{X_p} + \delta'_{sm_X})\,\overline{\varphi}(t) + (1 - e^{-\overline{\varphi}(t)})\,[\delta'_{X_p} - \delta_{el_X}(t_0)]. \qquad (4.30)$$

Nemění-li se statické působení a nedojde-li k posuvu podpor, vymizí zde poslední člen, neboť $\delta_{el_X}(t_0) = \delta_{X_p}$. Deformace od zatížení, popř. od smrštění je pak $\overline{\varphi}(t)$-násobkem pružné deformace od zatížení, popř. od smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Může-li se konstrukce volně smršťovat, je $\delta'_{sm_X} = 0$.

4.10. Relaxace napětí při konstantním stavu deformace tělesa

Uvažujme těleso, v němž je udržován konstantní stav deformace ve všech směrech. Řešení je dáno systémem diferenciálních rovnic (3.3), kde na levých stranách jsou nuly. Rovnice pro normálná napětí tvoří systém tří simultánních rovnic tvaru (4.9) a lze jej tedy řešit stejným způsobem. Charakteristická rovnice (4.14) (3. stupně) zní

$$\begin{vmatrix} \varkappa+\lambda, & -\mu'\varkappa-\mu\lambda, & -\mu'\varkappa-\mu\lambda \\ -\mu'\varkappa-\mu\lambda, & \varkappa+\lambda, & -\mu'\varkappa-\mu\lambda \\ -\mu'\varkappa-\mu\lambda, & \mu'\varkappa-\mu\lambda, & \varkappa+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Lze se přesvědčit, že má řešení

$$\lambda_1 = -\varkappa\frac{1+\mu'}{1+\mu}, \qquad \lambda_{2,3} = -\varkappa\frac{2+\mu'(1\pm\sqrt{6})}{2+\mu(1\pm\sqrt{6})}. \tag{4.31}$$

Partikulární řešení je podle (4.15) dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} \sigma_x - \mu'\sigma_y - \mu'\sigma_z + E\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) &= 0, \\ -\mu'\sigma_x + \sigma_y - \mu'\sigma_z + E\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) &= 0, \\ -\mu'\sigma_x - \mu'\sigma_y + \sigma_z + E\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) &= 0, \end{aligned}$$

odkud plyne

$$\sigma_{x_p} = -\frac{E}{1-2\mu'}\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} = \sigma_{y_p} = \sigma_{z_p}. \tag{4.32}$$

Odtud je možno podle rov. (4.16) vyjádřit průběh $\sigma_x, \ldots$. Rovnice pro smyková napětí $\tau_{xy}, \ldots$ jsou navzájem nezávislé a mají řešení

$$\tau_{xy}(t) = \tau_{xy}(t_0)\,\mathrm{e}^{\lambda_1\overline{\varphi}(t)}. \tag{4.33}$$

Řešení se zjednodušují pro $\mu' = \mu$, kde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\varkappa$, takže pak platí

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \sigma_x(t_0) + [\sigma_{xp} - \sigma_x(t_0)](1 - \mathrm{e}^{-\varkappa\overline{\varphi}(t)}), \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy}(t_0)\,\mathrm{e}^{-\varkappa\overline{\varphi}(t)}, \quad \ldots. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Za jednoosé napjatosti platí stejné rovnice pro obecné μ', když se konstantní stav deformace udržuje pouze ve směru osy x.

4.11. Zásady při návrhu staticky neurčitých konstrukcí

Jak při návrhu, tak při provádění konstrukce je nutno se snažit o omezení nepříznivých účinků dotvarování a smršťování. Velikost účinků lze ovlivnit různými činiteli. Ve stručnosti to jsou:

a) *Volba typu konstrukce a jejího statického systému, poměry tuhostí jejích částí.* Nejmenší časové změny napjatosti nastávají tehdy, blíží-li se konstrukce aspoň poměry svých tuhostí konstrukci staticky určité. Tak např. u letmo betonovaného konzolového rámu dosáhneme značného zmenšení účinků, volíme-li pilíře ohebnější, tj. vyšší a tenčí. Někdy je nutno s ohledem na nepříznivé účinky dotvarování a smršťování vytvářet dilatace, posuvné podpory, klouby ap. Účinky se zmenší vložením kloubů do polí letmo betonovaných nebo zavěšených betonových trámových mostů nebo použitím posuvného uložení do paty stěn nádrží apod. Účinky smršťování se odstraní volbou konstrukce s možností volného smršťování (spojitý nosník).

b) *Poměr stálého a nahodilého zatížení.* Účinky dotvarování jsou významnější u konstrukcí, u nichž má stálé zatížení větší podíl, např. hlavně u mostů a jiných konstrukcí velkých rozpětí.

c) *Poměr stálého zatížení a předpětí.* U nosníků z předpjatého betonu — např. u letmo betonované konzoly — je důležitým činitelem poměr momentů od předpětí a momentů od stálého zatížení, jenž navíc je ještě časově proměnný. Tento poměr závisí též na poměru stálého a nahodilého zatížení (most železniční nebo silniční, rozpětí), poměru napětí betonu a oceli (druh betonu) excentricitě kabelu. Momenty od předpětí se odčítají od momentů od vlastní váhy (malý rozdíl velkých čísel). Nejmenší účinky nastávají tehdy, je-li v průřezech tento rozdíl, tj. výsledný moment, nulový, neboť betonový průřez je pak zatížen rovnoměrným tlakem, takže se nosník dotvarováním pouze zkracuje, ale neohýbá. Avšak ani tehdy nelze považovat výsledné účinky za nulové, neboť je nutno uvážit, že skutečná předpínací síla je časově proměnlivá a může se snadno lišit od vypočtené. Doporučujeme proto posoudit velikost účinků pro dva mezní případy, kdy v průřezech působí předpínací síly změněné asi o ± 5 % až ± 10 % (součinitel nepřesnosti předpětí), nebo počítat přesným způsobem podle odst. 6.8. U zavěšených betonových trámových mostů jsou účinky též velmi citlivé na volbu počátečního předpětí a je zpravidla nutno propočíst řadu případů předpětí.

d) *Posuvy podpor, změny statického působení, rektifikace a předpětí konstrukce.* Směrodatná je jejich velikost a doba, v níž nastávají. Tak např. u letmo betonovaných konzol vnitřního pole jsou účinky menší, uzavřou-li se klouby později, což však nesmí ohrozit vstřícnost konzol. Nastane-li posuv podpor u starší konstrukce, je redukce jeho účinku dotvarováním menší, což nastává i u železobetonové konstrukce proti předpjaté.

U zavěšených betonových trámových mostů nebude možno se většinou

obejít bez pozdějších rektifikací předpětí lan, aby se zmenšily účinky dotvarování na mladé konstrukci. Při rektifikacích a předpětí konstrukce se obvykle dosáhne nejméně nepříznivých účinků dotvarování tehdy, jestliže se konstrukce předepne takovými silami, aby nejvýhodnější rozdělení vnitřních sil bez ohledu na vliv dotvarování a smršťování nastalo v okamžiku, kdy $\overline{\varphi}(t) \doteq \frac{1}{2}\overline{\varphi}(\infty)$. (Z těchto sil jako počátečních podmínek se pak musí vypočíst jednak zpětně potřebné výchozí síly, jednak síly pro $t \to \infty$.)

e) *Vlastnosti betonu.* Výrobou betonu s menším součinitelem dotvarování a smršťování (množství a druh cementu, vodní součinitel, druh kameniva aj.) se dosáhne zmenšení časových změn napjatosti.

f) *Teplota, vlhkost prostředí stavby a roční doba*, v níž se betonuje, tj. doba, do níž spadají rozdíly stáří betonu. Tento činitel ovlivňuje rychlost a velikost dotvarování a ovlivňuje nehomogenitu v důsledku různého stáří betonu. Spadá-li rozdíl stáří do suchého letního období, je nehomogenita větší a účinky vzrostou. Při betonování oblouku nebo rámu po lamelách se účinky smršťování redukují více v létě než v zimě. Tepelné dilatace vyvolávají napětí, která jsou z počátku značně redukována dotvarováním. Proto také po delší době má konstrukce nulové napětí od tepelné dilatace zhruba při průměrné teplotě prostředí, bez ohledu na teplotu při betonování.

g) *Postup výstavby konstrukce a tempo betonování.* Harmonogram betonování letmo betonovaného mostu je nutno stanovit tak, aby se betonovaly sousedící prvky — např. konzoly téhož pole — v nejmenším časovém odstupu a aby práce postupovala co nejrychleji, poněvadž přesuny napjatosti od dotvarování jsou tím menší, čím menší jsou rozdíly ve stáří betonu. Též při betonování symetrickém ke středu pole jsou účinky menší. U montovaných nosníkových roštů a jiných konstrukcí je nutno se snažit, aby rozdíly ve stáří betonu jednotlivých prvků nebyly velké, což však z výrobních důvodů není vždy možné. Totéž platí pro konstrukce vyrobené opakovaným použitím skruží nebo bednění, pro konstrukce postupně betonované na samonosné výztuži a pro spřažené nosníky, jejichž horní deska byla dodatečně vybetonována na prefabrikovaných nosnících. Účinky smršťování a sedání u oblouků a rámů se do značné míry omezují betonováním po lamelách (symetricky) tak, aby se oblouk či rám uzavřel co nejpozději. Je to částečně opačná tendence než u účinků nehomogenního dotvarování, kdy jde o minimální rozdíl stáří jednotlivých částí.

Dotvarování není jen nevýhodným jevem, ale lze jej též vhodně využít. Příznivý vliv dotvarování u betonových konstrukcí je v tom, že značně redukuje nepříznivé účinky posuvů podpor konstrukce, účinky smršťování a tepelných dilatací při dlouhodobých tepelných změnách během roku a účinky hydratačního tepla v betonových masívech.

Účinků dotvarování by bylo možno využít např. při skladbě prvků montované konstrukce. Tak např. u roštového nebo deskového mostu z prefabrikátů bývají často krajní prefabrikované nosníky namáhány od nahodilého zatížení více než nosníky vnitřní (obr. 4.3). Aby prvky měly jednotný tvar a byly rovnoměrně využity, je výhodné, aby krajní nosníky byly mladší než nosníky vnitřní, poněvadž dotvarováním se pak přesune část stálého zatížení do vnitřních nosníků a krajní nosníky se odlehčí. (Aby se zvětšil redukovaný rozdíl stáří betonu krajních a vnitřních prefabrikátů, bylo by možno uvážit umělé urychlení průběhu dotvarování vnitřních prvků, např. zahřátím.)

U nosníků průřezu spřaženého ze dvou betonových částí (viz kap. 6) dotvarování způsobí, že i pro prvé stálé zatížení, tj. vlastní váhu prefabrikovaných nosníků, se zapojí do akce druhá přidaná část průřezu (dodatečně vybetonovaná horní deska, římsa), čímž se zmenší napětí v průřezu. Příznivě se totéž projevuje u oblouků betonovaných po věncích, např. na samonosné výztuži.

Smršťování se v konstrukci jako celku většinou projevuje nepříznivě. V některých částech konstrukce však také může působit příznivě, např. na momenty ve vetknutí příčle rámu.

5. Přibližné metody řešení

Obecné řešení vlivu nehomogenního dotvarování a smršťování při spolupůsobení betonu různého stáří nebo betonu s ocelí nebo s podložím, jež bylo podáno v předešlé kapitole, je u vícekrát staticky neurčitých konstrukcí složité a pracné a u většiny okrajových úloh daných v prostoru diferenciálními rovnicemi i prakticky nemožné. Proto odvodíme přibližná konvergující řešení pro složitější úlohy dotvarování [8]. Příkladem takových úloh jsou např. zavěšené betonové trámové mosty se šikmými i parabolickými závěsnými lany, montované betonové konstrukce rámové, betonové nosníky na pružném podkladě, úlohy o deskách, stěnách, skořepinách ap.

Poznámka: Přibližnost řešení je míněna jako početní přibližnost vzhledem k výchozím předpokladům kap. 2, které ovšem samy jsou vůči skutečnosti nebo vůči přesnějším teoriím též jen přibližné.

5.1. Integrace rozvojem v mocninnou řadu

Uvažujme staticky neurčitou konstrukci a předpokládejme, že funkce $\delta_i'(t)$, $\mathrm{d}\delta_i(t)/\mathrm{d}\varphi$ dané průběhem vnějšího zatížení, posuvy podpor, popřip. změnami teploty lze v jistém intervalu vyjádřit mocninnou funkcí $\varphi(t)$ (jsou spojité a mají spojité derivace). Řešení přetvárných rovnic (4.9) lze pak hledat v tomto intervalu ve tvaru mocninné řady [38]

$$X_i(t) = X_i(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} X_{i(\alpha)} \overline{\varphi}^{\alpha} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

Koeficienty řady lze určit buď dosazením rov. (5.1) do (4.9) metodou neurčitých součinitelů (součet koeficientů u stejných mocnin $\overline{\varphi}^{\alpha}$ roven nule) nebo podle vzorce Taylorova

$$X_{i(\alpha)} = \frac{1}{\alpha!} \frac{\mathrm{d}^{\alpha} X_i(t_0)}{\mathrm{d}\varphi^{\alpha}}. \tag{5.2}$$

Derivaci $\mathrm{d}X_i/\mathrm{d}\varphi$ lze vyjádřit přímo z rov. (4.9) pomocí hodnot X_i. Vyšší derivace $\mathrm{d}^{\alpha}X_i/\mathrm{d}\varphi^{\alpha}$ lze vypočíst, derivují-li se $(\alpha - 1)$krát rovnice (4.9). Obdrží se tak rekurentní vztahy

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_{j(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} X_{j(\alpha-1)} + \\ + \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}}{\mathrm{d}\varphi^{\alpha-1}} (\delta'_i(t_0) + \delta'_{sm_i}) + \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\varphi^{\alpha}} \delta_i(t_0) \right] = 0, \tag{5.3}$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

kde $X_{i(0)} = X_i(t_0)$. Pro $\alpha > 1$ je zde zřejmě $\mathrm{d}^{\alpha-1}\delta'_{sm_i}/\mathrm{d}\varphi^{\alpha-1} = 0$. Při konstantním zatížení a neposuvnosti podpor se anulují i derivace hodnot δ_i a δ'_i a rovnice se zjednodušují.

Rovnice (5.3) tvoří systémy n lineárních rovnic pro neznámé $X_{1(\alpha)} \ldots$, $X_{n(\alpha)}$, které mají všechny stejnou matici $[\delta_{ij}]$. Je to matice pro řešení dané pružné konstrukce. Podle rovnic (5.3) můžeme postupně vypočítat koeficienty $X_{j(\alpha)}$ mocninné řady, počínaje od dané počáteční hodnoty $= X_{j_0}$. Postup řešení je znázorněn v maticové symbolice v tab. 5.1a.

Omezíme-li se v řadě (5.1) na konečný počet členů až do řádu α_0, lze řešení považovat za přibližné. Pro zbytek podle Taylorova vzorce platí výraz $[\mathrm{d}^{\alpha_0+1}X_i(t_1)/\mathrm{d}\varphi^{\alpha_0+1}]\,\overline{\varphi}^{\alpha_0+1}/(\alpha_{0+1})!$, kde t_1 značí jistou hodnotu v intervalu (t_0, t).

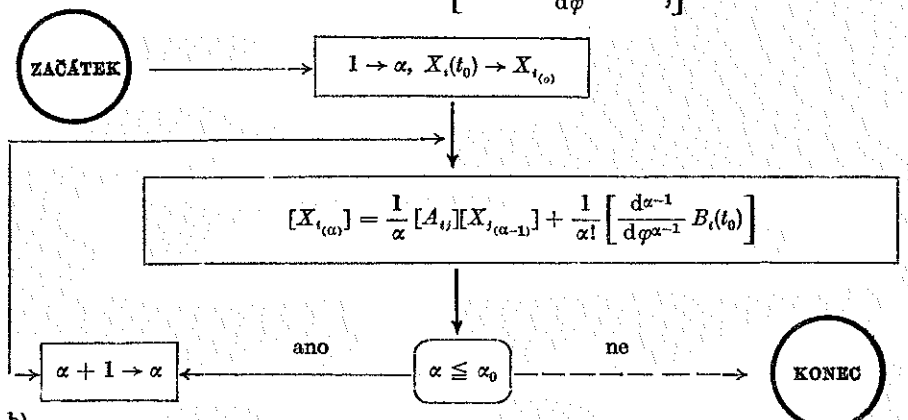
Mají-li se z daných konečných hodnot $X_i(\infty)$ zpětně určit počáteční hodnoty $X_i(t_0)$ nutné k dosažení těchto konečných hodnot, platí zřejmě tytéž rovnice, v nichž se pouze zamění t_0 za ∞ a $\overline{\varphi} = \varphi(t) - \varphi(t_0)$ za $-(\varphi(\infty) - \varphi(t_0))$.

5.2. Integrace postupnými aproximacemi

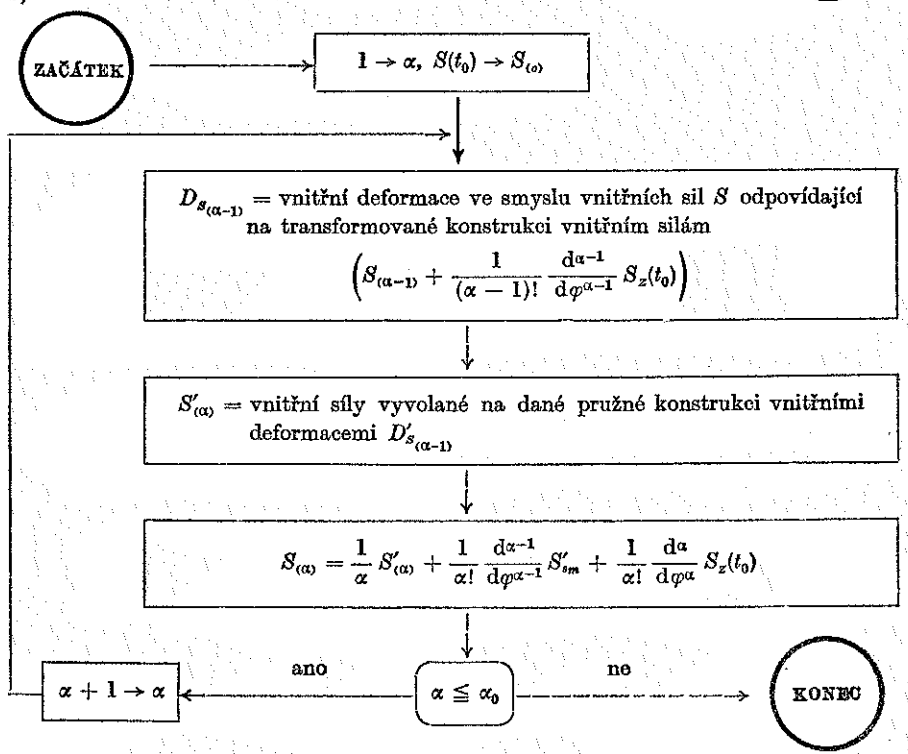
Jako prvé přiblížení se zvolí hodnoty $X_{i(1)} = X_i(t_0)$ a dosadí se za $X_i(t_1)$ do rovnic (4.9). Integrováním těchto rovnic od $t = t_0$ do t se obdrží rovnice, jež pro r-tou aproximaci zní

Tabulka 5.1. Blokové schéma pro výpočet koeficientů mocninné řady, a) pro staticky neurčitou konstrukci — rov. (5.1), b) obecně

a) $[A_{ij}] = -[\delta_{ik}]^{-1}[\delta_{kj}]$, $[B_i(t)] = -[\delta_{ij}]^{-1}\left[\delta'_j(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_j(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_j}\right]$



b)



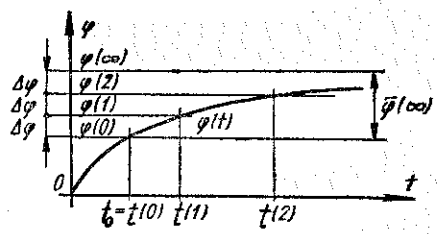
$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}[X_{j_{(r)}} - X_j(t_0)] + \sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} \int_{t_0}^{t} X_{j_{(r-1)}}\,\mathrm{d}\varphi(\tau) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \delta'_i(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau) + \delta_i(t) - \delta_i(t_0) + \delta'_{sm_i}\bar{\varphi}(t) = 0. \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (5.4)$$

Jejich řešením lze určit hodnoty $X_{i_{(r)}}$ z hodnot $X_{i_{(r-1)}}$ [38]. Tyto hodnoty s rostoucím r obvykle konvergují k přesnému řešení. V [38] je udáno poměrně jednoduché omezení chyby. Vypočtený analytický výraz pro $X_i(t)$ je totožný s rozvojem (5.1) v mocninovou řadu. Postupné aproximace konvergují, i když se za $X_{i_{(1)}}$ zvolí libovolný analytický výraz splňující počáteční podmínky (omezený v daném intervalu).

5.3. Numerická integrace polygonální (Eulerova-Cauchyho)

Interval $0 \leqq \bar{\varphi}(t) \leqq \bar{\varphi}(\infty)$, kde $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, rozdělíme na m_0 dílků $\Delta\varphi^{(m)} = \varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}$ (obr. 5.1). Hodnotám $\Delta\varphi^{(m)}$ odpovídají podle křivky $\varphi(t)$ (spojitá stále rostoucí funkce) časové úseky $\Delta t'^{(m)} = t'^{(m)} - t'^{(m-1)}$, kde $\varphi'^{(m)} = \varphi(t'^{(m)})$. Poslední dílek není časově ukončený, $t'^{(m_0)} \to \infty$.



Obr. 5.1. Dělení na dílky pro numerickou integraci

Při rovnoměrném dělení na dílky $\Delta\varphi = \bar{\varphi}(\infty)/m_0$ nejsou zřejmě odpovídající časové úseky $\Delta t'^{(m)}$ stejné. Hodnoty $X_i(t)$, popř. $M(t)$, ... na konci m-tého dílku označme $X_i^{(m)}$, popř. $M^{(m)}$, ..., kde $X_i^{(m)} = X_i(t'^{(m)})$, ... Podobně označme i hodnoty $\delta_i^{(m)}$, $\delta_i'^{(m)}$ odpovídající vnějšímu zatížení, teplotě a celkovému posuvu podpor v čase $t'^{(m)}$. Změnám vnějšího zatížení a posuvům podpor v časovém úseku $t'^{(m-1)} < t \leqq t'^{(m)}$ odpovídají změny $\Delta\delta_i^{(m)}$. Průběh zatížení, posuvů podpor a teploty i jejich derivací může být nespojitý, avšak je vhodné volit dělení tak, aby nespojitosti byly pouze v dělicích bodech $t'^{(m)}$.

Pišme mocninnou řadu (5.1) pro m-tý dílek s počáteční hodnotou $X_i^{(m-1)}$. Volíme-li $\Delta\varphi$ dostatečně malé, lze se v mocninné řadě omezit přibližně jen na prvý člen. Nahradíme-li v rov. (5.1) $\bar{\varphi}$ za $\Delta\varphi$, $X_i(t)$ za $X_i^{(m)}$,

$X_i(t_0)$ za $X_i^{(m-1)}$ a označíme-li $X_{i_{(2)}}\Delta\varphi = \Delta X_i^{(m)}$, obdržíme pro m-tý dílek diferenční vztah

$$X_i^{(m)} = X_i^{(m-1)} + \Delta X_i^{(m)}. \tag{5.5}$$

Zanedbáním členů řádu druhého a vyšších vzniká zde chyba, jejíž velikost podle vzorce Taylorova je $\frac{1}{2}\Delta\varphi^2[\mathrm{d}^2X_i(t_1^{(m)})/\mathrm{d}\varphi^2]$, kde $t_1^{(m)}$ je jistá hodnota v intervalu $(t'^{(m-1)}, t'^{(m)})$. Z rov. (5.3) pro $\alpha = 1$ vyplývají po znásobení $\Delta\varphi$ a příslušných dosazeních diferenční rovnice pro m-tý dílek [38]

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m-1)} + \delta_i'^{(m-1)} + \delta'_{sm_i}\right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0,$$
$$(i = 1, \ldots, n), \tag{5.6}$$

tvořící systém n lineárních rovnic pro neznámé $\Delta X_j^{(m)}$ s maticí $[\delta_{ij}]$ dané pružné konstrukce. [Rov. (5.6) lze snadno odvodit též přímo.] Při výpočtu se vyjde od daných počátečních hodnot $X_i^{(0)} = X_i(t_0)$ a opakováním řešení rov. (5.6) a přičítáním změn $\Delta X_i^{(m)}$ podle rov. (5.5) se postupně získají hodnoty $X_i^{(m)}$ a $X_i^{(m_0)} = X_i(\infty)$. V [38] je udáno omezení chyby pro $n = 1$.

Tento postup můžeme označit za numerickou integraci vpřed. Její blokové schéma je znázorněno v maticové symbolice v tab. 5.2a. ([1] značí jednotkovou matici — čtvercovou, v hlavní diagonále jednotky a ostatní prvky nulové.) Potřebujeme-li vypočíst naopak zpětně výchozí hodnoty potřebné k dosažení daného konečného stavu, postupujeme tzv. numerickou integrací vzad, vycházející z konečné hodnoty místo z počáteční hodnoty v daném dílku. Její blokové schéma se získá záměnami operací $1 \to m$, $X_{i_0} \to X_i^{(0)}$, $m < m_0$ za $m_0 \to m$, $X_i(\infty) \to X_i^{(m_0)}$, $m > 0$ a veličin $X_i^{(m-1)}$ za $X_i^{(m)}$ a $\delta_i'^{(m-1)}$ za $\delta_i'^{(m)}$. Diferenční rovnice pro integraci zpět má tvar $X_i^{(m-1)} = X_i^{(m)} - \Delta X_i^{(m)}$ (5.5a), kde

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m)} + \delta_i'^{(m)} + \delta'_{sm_i}\right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0.$$
$$(i = 1, \ldots, n). \tag{5.6a}$$

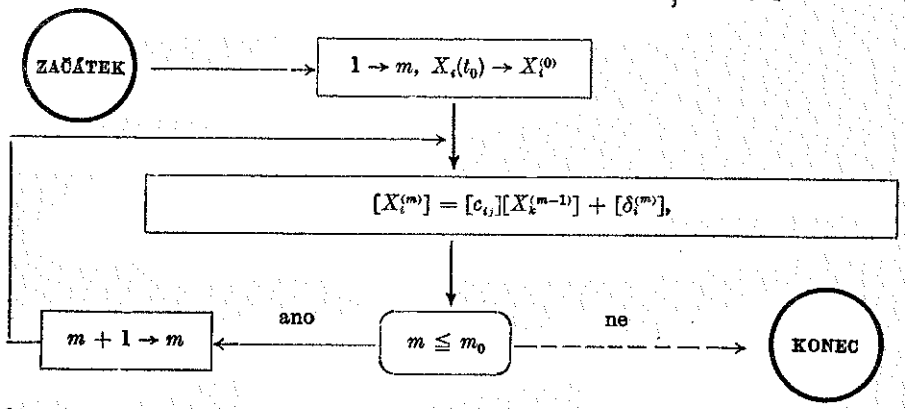
Při výpočtu se vyjde z požadovaných konečných hodnot $X_i(\infty)$.

Příklad 5.3.1. Postup při řešení pro názornost ukažme na příkladě konstrukce podle obr. 4.2b.

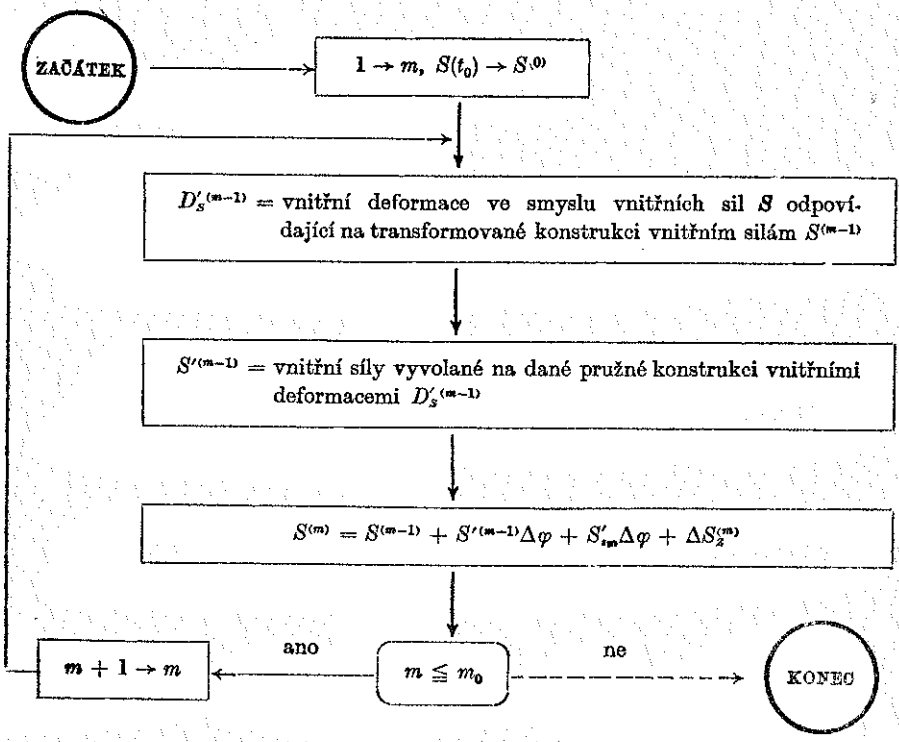
Při rozvoji v mocninnou řadu je $\delta_{XX}X_{(1)} + \delta'_{XX}X_{(0)} + \delta'_X = 0$, $\delta_{XX}X_{(2)} + \frac{1}{2}\delta'_{XX}X_{(1)} = 0, \ldots$. Řešením při $X_{(0)} = 0$ plyne $X_{(1)} = -\frac{3}{16}ql(1-\varkappa)$, $X_{(2)} = \frac{3}{16}ql(1-\varkappa)(1+\varkappa)/4, \ldots$, a tedy $X(t) = -\frac{3}{16}ql(1-\varkappa)\,[\bar{\varphi} - \frac{1}{4}(1+\varkappa)\bar{\varphi}^2 + \frac{1}{16}(1+\varkappa)^2\bar{\varphi}^3 - \ldots]$.

Tabulka 5.2. Blokové schéma pro numerickou integraci vpřed (polygonální) a) pro staticky neurčitou konstrukci, b) obecně

a) $[c_{ij}] = [1] - \Delta\varphi[\delta_{ik}]^{-1}[\delta'_{kj}]$, $[\delta_i^{(m)}] = -[\delta_{ij}]^{-1}[\Delta\varphi(\delta_j'^{(m-1)} + \delta'_{sm_j}) + \Delta\delta_j^{(m)}]$



b)



$X_i(t_0)$ za $X_i^{(m-1)}$ a označíme-li $X_{i_{(1)}}\Delta\varphi = \Delta X_i^{(m)}$, obdržíme pro m-tý dílek diferenční vztah

$$X_i^{(m)} = X_i^{(m-1)} + \Delta X_i^{(m)}. \tag{5.5}$$

Zanedbáním členů řádu druhého a vyšších vzniká zde chyba, jejíž velikost podle vzorce Taylorova je $\frac{1}{2}\Delta\varphi^2[\mathrm{d}^2X_i(t_1^{(m)})/\mathrm{d}\varphi^2]$, kde $t_1^{(m)}$ je jistá hodnota v intervalu $(t'^{(m-1)}, t'^{(m)})$. Z rov. (5.3) pro $\alpha = 1$ vyplývají po znásobení $\Delta\varphi$ a příslušných dosazeních diferenční rovnice pro m-tý dílek [38]

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m-1)} + \delta_i'^{(m-1)} + \delta'_{sm_i}\right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0,$$
$$(i = 1, \ldots, n), \tag{5.6}$$

tvořící systém n lineárních rovnic pro neznámé $\Delta X_j^{(m)}$ s maticí $[\delta_{ij}]$ dané pružné konstrukce. [Rov. (5.6) lze snadno odvodit též přímo.] Při výpočtu se vyjde od daných počátečních hodnot $X_i^{(0)} = X_i(t_0)$ a opakováním řešení rov. (5.6) a přičítáním změn $\Delta X_i^{(m)}$ podle rov. (5.5) se postupně získají hodnoty $X_i^{(m)}$ a $X_i^{(m_0)} = X_i(\infty)$. V [38] je udáno omezení chyby pro $n = 1$.

Tento postup můžeme označit za numerickou integraci vpřed. Její blokové schéma je znázorněno v maticové symbolice v tab. 5.2a. ([**1**] značí jednotkovou matici — čtvercovou, v hlavní diagonále jednotky a ostatní prvky nulové.) Potřebujeme-li vypočíst naopak zpětně výchozí hodnoty potřebné k dosažení daného konečného stavu, postupujeme tzv. numerickou integrací vzad, vycházející z konečné hodnoty místo z počáteční hodnoty v daném dílku. Její blokové schéma se získá záměnami operací $1 \to m$, $X_{i_0} \to X_i^{(0)}$, $m < m_0$ za $m_0 \to m$, $X_i(\infty) \to X_i^{(m_0)}$, $m > 0$ a veličin $X_i^{(m-1)}$ za $X_i^{(m)}$ a $\delta_i'^{(m-1)}$ za $\delta_i'^{(m)}$. Diferenční rovnice pro integraci zpět má tvar $X_i^{(m-1)} = X_i^{(m)} - \Delta X_i^{(m)}$ (5.5a), kde

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m)} + \delta_i'^{(m)} + \delta'_{sm_i}\right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0.$$
$$(i = 1, \ldots, n). \tag{5.6a}$$

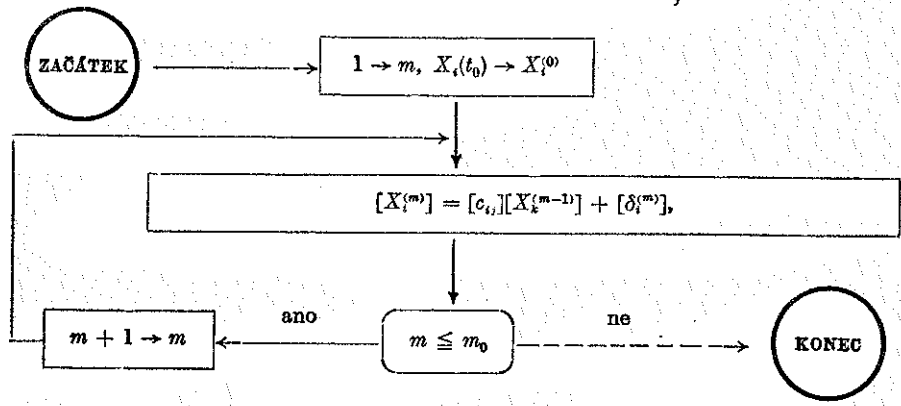
Při výpočtu se vyjde z požadovaných konečných hodnot $X_i(\infty)$.

Příklad 5.3.1. Postup při řešení pro názornost ukažme na příkladě konstrukce podle obr. 4.2b.

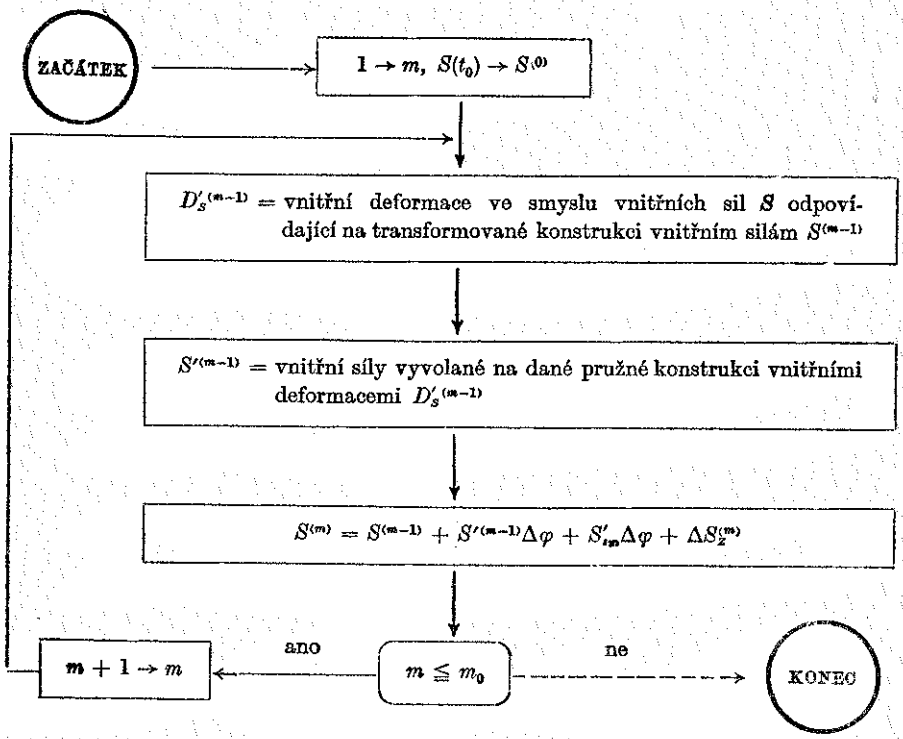
Při rozvoji v mocninnou řadu je $\delta_{XX}X_{(1)} + \delta'_{XX}X_{(0)} + \delta'_X = 0$, $\delta_{XX}X_{(2)} + \frac{1}{2}\delta'_{XX}X_{(1)} = 0, \ldots$. Řešením při $X_{(0)} = 0$ plyne $X_{(1)} = -\frac{3}{16}ql(1 - \varkappa)$, $X_{(2)} = \frac{3}{16}ql(1 - \varkappa)(1 + \varkappa)/4, \ldots$, a tedy $X(t) = -\frac{3}{16}ql(1 - \varkappa)\,[\bar{\varphi} - \frac{1}{4}(1 + \varkappa)\bar{\varphi}^2 + \frac{1}{16}(1 + \varkappa)^2\bar{\varphi}^3 - \ldots]$.

Tabulka 5.2. Blokové schéma pro numerickou integraci vpřed (polygonální)
a) pro staticky neurčitou konstrukci, b) obecně

a) $[c_{ij}] = [\mathbf{1}] - \Delta\varphi[\delta_{ik}]^{-1}[\delta'_{kj}]$, $[\delta_i^{(m)}] = -[\delta_{ij}]^{-1}[\Delta\varphi(\delta_j'^{(m-1)} + \delta'_{sm_j}) + \Delta\delta_j^{(m)}]$



b)



Při řešení polygonální numerickou integrací počítáme postupně:

$$\Delta X^{(1)} = -(\delta'_{XX}X_0 + \delta'_X)/\delta_{XX}, \quad X^{(1)} = X_0 + \Delta X^{(0)};$$
$$\Delta X^{(2)} = -(\delta'_{XX}X^{(1)} + \delta'_X)/\delta_{XX}, \quad X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(2)};$$
$$\Delta X^{(3)} = -(\delta'_{XX}X^{(2)} + \delta'_X)/\delta_{XX}, \quad X^{(3)} = X^{(2)} + \Delta X^{(3)}, \ldots.$$

Při integraci zpět postupujeme takto:

$$X^{(m_0)} = -(\delta'_{XX}X(\infty) + \delta'_X)/\delta_{XX}, \quad X^{(m_0-1)} = X^{(m_0)} - \Delta X^{(m_0)}, \quad \Delta X^{(m_0-1)} = \ldots.$$

5.4. Numerická integrace Rungeho—Kuttova

Tato numerická integrace dává řešení se značně menší chybou než předcházející metody, neboť vypočtené přibližné řešení má s přesným řešením v dělicím bodě styk čtvrtého řádu ([38], str. 881, [15]). Řešení je dáno vzorcem

$$X_i^{(m)} = X_i^{(m-1)} + \frac{1}{6}\Delta\varphi({}^1k_i^{(m)} + 2\,{}^2k_i^{(m)} + 2\,{}^3k_i^{(m)} + {}^4k_i^{(m)}), \tag{5.7}$$

kde hodnoty ${}^1k_i^{(m)}, \ldots$ se postupně určí řešením rovnic

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,{}^1k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^{n}\delta'_{ij}X_i^{(m-1)} + \delta_i'^{(m-1)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\delta_i^{(m-1)} + \delta'_{sm_i} = 0, \tag{5.8a}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,{}^2k_j^{(m} + \sum_{j=1}^{n}\delta'_{ij}\left(X_j^{(m-1)} + \frac{1}{2}\Delta\varphi\,{}^1k_j^{(m)}\right) + \delta_i'^{(m-\frac{1}{2})} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\delta_i^{(m-\frac{1}{2})} + \\ + \delta'_{sm_i} = 0, \tag{5.8b}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,{}^3k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^{n}\delta'_{ij}\left(X_j^{(m-1)} + \frac{1}{2}\Delta\varphi\,{}^2k_j^{(m)}\right) + \delta_i'^{(m-\frac{1}{2})} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\delta_i^{(m-\frac{1}{2})} + \\ + \delta'_{sm_i} = 0, \tag{5.8c}$$

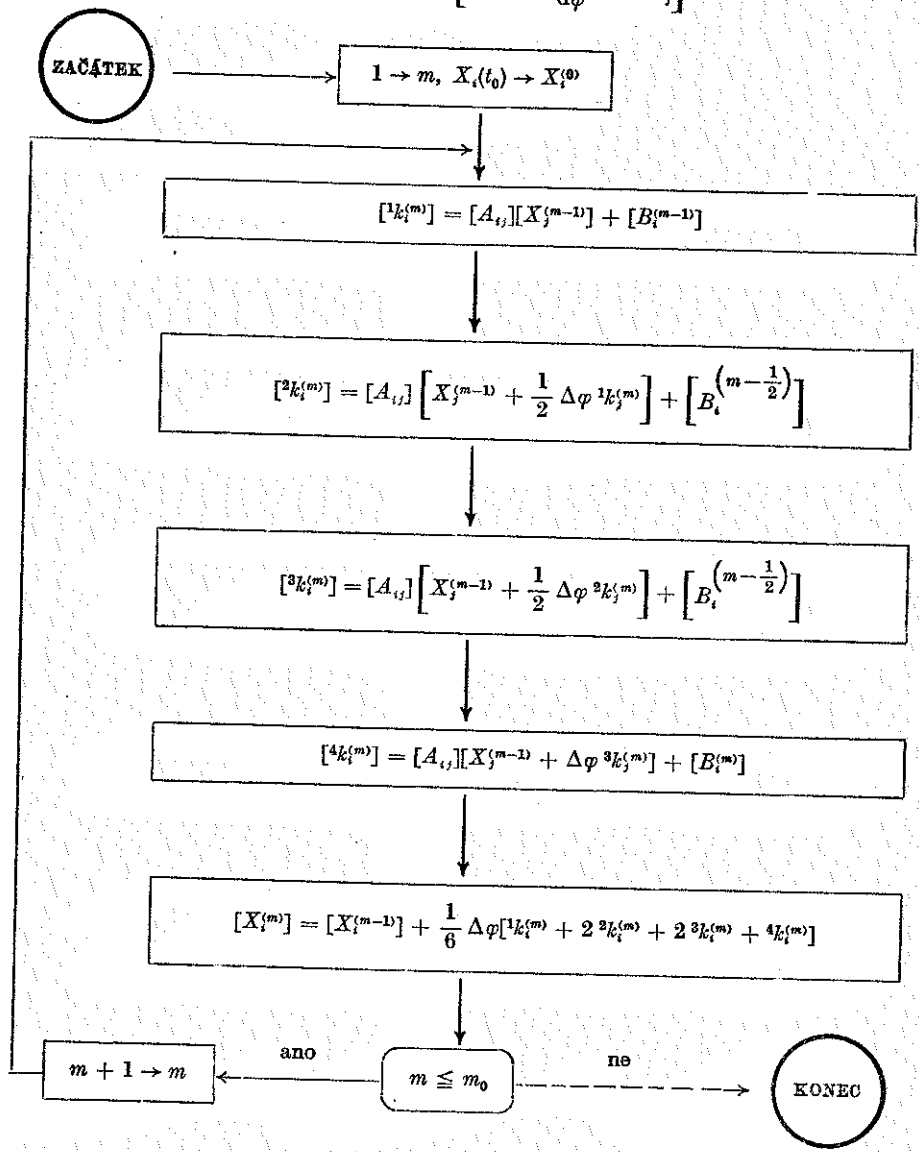
$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,{}^4k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^{n}\delta'_{ij}(X_j^{(m-1)} + \Delta\varphi\,{}^3k_j^{(m)}) + \delta_i'^{(m)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\delta_i^{(m)} + \delta'_{sm_i} = 0. \tag{5.8d}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

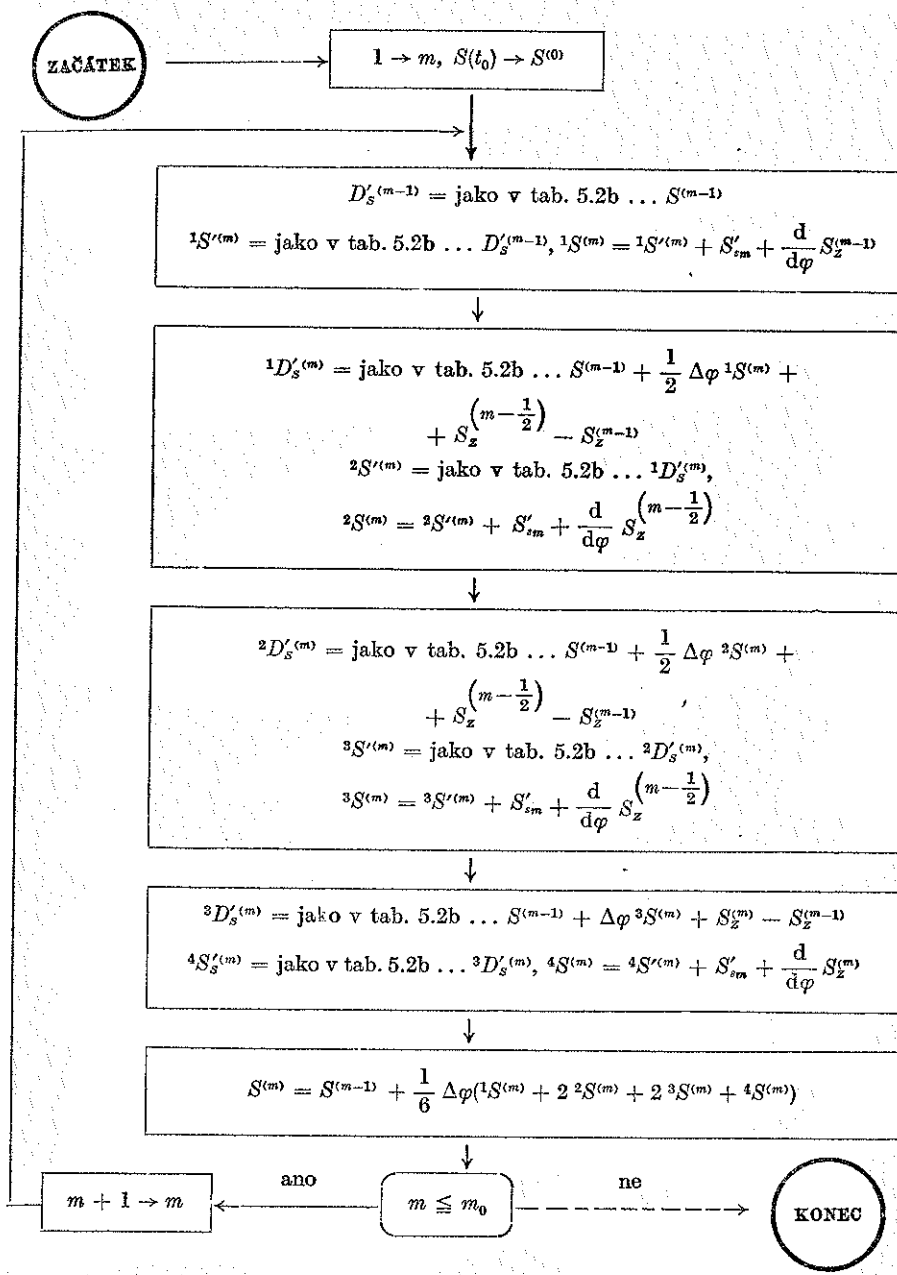
Blokové schéma řešení je znázorněno v tab. 5.3a. Index $m - \frac{1}{2}$ značí hodnotu odpovídající hodnotě $\varphi^{(m)} - \frac{1}{2}\Delta\varphi^{(m)}$. Postup integrace zpět dostáváme odtud např. záměnou $\Delta\varphi$ za $-\Delta\varphi$ a obráceným číslováním dílků.

Tabulka 5.3. Blokové schéma pro numerickou integraci Runge—Kutta (vpřed)
a) pro staticky neurčitou konstrukci, b) obecně

a) $[A_{ij}] = -[\delta_{ik}]^{-1}[\delta'_{kj}]$, $[B_i^{(m)}] = -[\delta_{ij}]^{-1}\left[\delta_j'^{(m)} + \frac{\mathrm{d}\delta_j^{(m)}}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_j}\right]$



b) Pokračování tab. 5.3



5.5. Zobecnění přibližných řešení

Přibližná řešení dotvarování lze zobecnit pro okrajové úlohy dané diferenciálními rovnicemi v prostorových souřadnicích, např. desky, stěny, skořepiny, nosník na pružném podkladě, obecná tělesa ap. Kdybychom totiž řešili okrajovou úlohu v prostorových souřadnicích některou přibližnou metodou, např. metodou sítí, obdrželi bychom systém rovnic tvaru (4.9). Pro počet rovnic $n \to \infty$ konverguje toto řešení k přesnému řešení v prostorových souřadnicích. Jestliže předpokládáme, že taková formulace řešení této soustavy lineárních rovnic, která nezávisí na počtu rovnic n, platí nezměněně i pro $n \to \infty$, plyne odtud možnost zobecnění na okrajové úlohy. Jde přitom pouze o to, nalézt takové vyjádření přibližných řešení dotvarování, které by nezáviselo na volbě staticky neurčitých a jejich počtu.

Označme obecně $S_Z(t)$, popř. $\Delta S_Z^{(m)}$ vnitřní síly (např. napětí, ohybový moment, normálnou sílu ap.), vyvolané na dané pružné konstrukci vnějším zatížením, celkovým posuvem podpor a teplotou v čase t, popř. přírůstkem zatížení, posuvem podpor a změnou teplot v časovém intervalu $\Delta t^{(m)} = t^{(m)} - t'^{(m-1)}$; S'_{sm} vnitřní síly vyvolané na dané pružné konstrukci poměrnými smrštěními $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Potom platí, že přibližné řešení vnitřních sil $S(t)$ v obecné úloze rozvojem v mocninnou řadu je dáno schématem podle tab. 5.1b, kde $S(t) = S(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} S_{(\alpha)}\,\bar{\varphi}^{\alpha}$, přibližné řešení numerickou integrací polygonální schématem podle tab. 5.2b, numerickou integrací Runge—Kutta schématem podle tab. 5.3b (výrazy $D'_{S_{(\alpha)}}$, $S'_{(\alpha)}$, $D_S'^{(m)}$ a $S'^{(m)}$ jsou definovány v příslušných tabulkách). O správnosti obecné formulace pro staticky neurčitou konstrukci lze se přesvědčit, dosadí-li se za $S(t)$ vnitřní síly $M(t)$, $N(t)$, ... konstrukce $\left(M = \mathfrak{M} + \sum_i \overline{M}_i X_i\right)$, jimž na transformované konstrukci odpovídají vnitřní deformace $M(t)/E'J$, $N(t)/E'F$, ..., a vyjádří-li se řešení dané pružné konstrukce podle přetvárných výminek staticky neurčité konstrukce (silová metoda). Dostanou se tak rovnice v tab. 5.1a, 2a, 3a.

K obecnému postupu polygonální numerické integrace lze také dospět na základě této jednoduché názorné úvahy. Předpokládejme, že po malou dobu Δt jsou vnitřní síly konstantní. Za tuto dobu vznikly vlivem dotvarování vnitřní deformace velikosti $D'_S\Delta\varphi$ a vlivem smršťování deformace $\Delta\varphi\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ (členy vyšších řádů zanedbáváme). Protože podepřením tělesa a podmínkami kompatibility deformací je těmto deformacím bráněno, vzniknou

za dobu Δt takové změny vnitřních sil, které na dané pružné konstrukci jsou vyvolány vnitřními deformacemi $D'_S\Delta\varphi$ a $\Delta\varphi\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

5.6. Převod vnitřní deformace na zatížení

Podle předešlého odstavce při řešení dotvarování libovolnou přibližnou metodou jde v podstatě o problém určení vnitřních sil S', popř. S'_{sm}, vyvolaných na dané pružné konstrukci vnitřními deformacemi D'_S, popř. $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, kde D'_S značí deformaci ve smyslu vnitřních sil S, odpovídající jim na transformované konstrukci podle Hookova zákona pro transformované těleso (E', μ', G'). Je to problém teorie pružnosti. U konstrukce lze S' vypočíst celkem snadno, neboť deformace základní soustavy ve smyslu staticky neurčitých lze přímo vyjádřit. To však u problémů daných v prostorových souřadnicích diferenciálními rovnicemi není možné. *Obecný postup* je pak tento:

Deformace D'_S a poměrná smrštění $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ se zruší na dané pružné konstrukci (konstanty E, μ, G) vnitřními silami $\tilde{S}$ plynoucími z Hookeova zákona. Dále se určí zatížení $\tilde{Z}$, jaké odpovídá vnitřním silám $\tilde{S}$ podle diferenciálních podmínek rovnováhy a podle podmínek rovnováhy na povrchu tělesa (koncích prutů, okrajích desky ap.), popřípadě rovnováhy v plochách nespojitého průběhu funkce $\varkappa$ (body nespojitosti $\varkappa$ u prutu, čáry nespojitosti u desky ap.). Nakonec se řešením dané pružné konstrukce (konstanty E, μ, G) vypočtou vnitřní síly $\overline{S}$ vyvolané na dané pružné konstrukci zatížením $-\tilde{Z}$. Účinek deformace D'_S a smrštění $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ na dané pružné konstrukci je pak dán vnitřními silami $S' + S'_{sm} = \tilde{S} + \overline{S}$. Pro názornost předvedeme nyní postup v jednotlivých případech.

a) Uvažujme napřed konstrukci z prutů homogenního průřezu, kde převod je velmi jednoduchý. (Vliv posouvajících sil na deformace neuvažujme.) Při označení $\mathrm{d}^2\tilde{w}'/\mathrm{d}x^2 = -M/E'J$, $\tilde{\varepsilon}' = N/E'F + \varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, kde w je průhyb, ε poměrné protažení prutu a M, N vnitřní síly (s vlivem předpětí průřezu), je $\tilde{M} = EJ/(\mathrm{d}^2\tilde{w}'/\mathrm{d}x^2)$, $\tilde{N} = -EF\,\tilde{\varepsilon}'$ neboli

$$\tilde{M} = -\varkappa M, \quad \tilde{N} = -\varkappa N - EF\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}. \tag{5.9}$$

Podle rovnic rovnováhy přísluší vnitřním silám $\tilde{M}, \tilde{N}$ spojité zatížení $\tilde{q}$ napříč prutu a $\tilde{n}$ podél prutu

$$\tilde{q} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\varkappa M), \quad \tilde{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{N}. \tag{5.10}$$

K tomu přistupuje zatížení odpovídajícími momenty $\tilde{M}$, normálnými silami $\tilde{N}$ a posouvajícími silami $\tilde{T} = \mathrm{d}\tilde{M}/\mathrm{d}x$ na koncích prutů (na vetknutém konci odpadá $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{T}$, na kloubové podpoře $\tilde{T}$, neboť se ruší s vazbami podpory). V bodech, kde průběh $\varkappa = \varkappa(x)$ je nespojitý (s hodnotou $\varkappa_l$ vlevo a $\varkappa_p$ vpravo od tohoto bodu) dále přistupuje zatížení $(\varkappa_p - \varkappa_l)M$, $-(\varkappa_p - \varkappa_l)(N + EF\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty))$, $\mathrm{d}[(\varkappa_p - \varkappa_l)M]/\mathrm{d}x$. Neřešíme-li konstrukci pomocí příčinkových čar, není třeba určovat $\tilde{q}$, neboť deformace základní soustavy lze počítat přímo z redukovaných momentových ploch $\varkappa M, \ldots$. Při $\varkappa = \mathrm{konst}$ v určitém úseku prutu je v tomto úseku $\tilde{q} = -\varkappa q$. Uplatňuje-li se též vliv krouticích momentů K, platí $\tilde{K} = -\varkappa K(1+\mu)/(1+\mu')$ a odpovídající zatížení příčným momentem je $\tilde{m} = \mathrm{d}\tilde{K}/\mathrm{d}x$.

Poznámka. Při uvažování smykových deformací za ohybu by bylo nutno M určit řešením diferenciální rovnice:

$$\tilde{M} - 2(1+\mu)(\mathrm{d}^2M/\mathrm{d}x^2)\,J/F_0 = \varkappa M - 2\varkappa(1+\mu')(\mathrm{d}^2M/\mathrm{d}x^2)\,J/F_0.$$

b) Nejobecnější případ je složená prostorová napjatost tělesa (izotropního). V kartézských souřadnicích x, y, z je podle přetvárných rovnic (3.4a) transformovaného tělesa

$$E\tilde{\varepsilon}'_x = \varkappa\left(\sigma_x - \mu'\sigma_y - \mu'\sigma_z + E\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right),$$
$$E\tilde{\gamma}'_{xy} = 2\varkappa(1+\mu')\,\tau_{xy}, \tag{5.11}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Z přetvárných rovnic daného pružného tělesa pak lze pomocí $\tilde{\varepsilon}'_x, \tilde{\gamma}'_{xy}, \ldots$, vyjádřit hodnoty

$$\tilde{\sigma}_x = -\frac{(1-\mu)\,E\tilde{\varepsilon}'_x + \mu(E\tilde{\varepsilon}'_y + E\tilde{\varepsilon}'_z)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \tag{5.12}$$
$$\tilde{\tau}_{xy} = -\frac{E\tilde{\gamma}'_{xy}}{2(1+\mu)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

jež podle (5.11) nezávisí na E. Tomu odpovídá zatížení daného pružného tělesa objemovými silami $\tilde{V}_x, \tilde{V}_y, \tilde{V}_z$:

$$\tilde{V}_x = -\frac{\partial\tilde{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\tau}_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{\tau}_{zx}}{\partial z}, \ldots \tag{5.13}$$

a poměrným povrchovým zatížením $\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z$:

$$\tilde{p}_x = n_x\tilde{\sigma}_x + n_y\tilde{\tau}_{yx} + n_z\tilde{\tau}_{zx}, \ldots \tag{5.14}$$

kde n_x, n_y, n_z jsou směrové kosiny normály povrchové plochy. V případě nespojitosti funkce $\varkappa = \varkappa(x, y, z)$ na nějaké ploše je nutno v této ploše dále zavést poměrné povrchové zatížení $\tilde{S}_x, \ldots$

$$\tilde{S}_x = n_x(\tilde{\sigma}_{x_2} - \tilde{\sigma}_{x_1}) + n_y(\tilde{\tau}_{yx_2} - \tilde{\tau}_{yx_1}) + n_z(\tilde{\tau}_{zx_2} - \tilde{\tau}_{zx_1}), \tag{5.15}$$

kde $\tilde{\sigma}_{x_2}$, popř. $\tilde{\sigma}_{x_1}, \ldots$ odpovídá koeficientu $\varkappa_2$, popř. $\varkappa_1$ a μ_2', popř. μ_1' na jedné straně plochy nespojitosti (ve smyslu normály), popř. na druhé její straně. Pod zatížením těmito silami se pak dané pružné těleso řeší kterýmkoliv způsobem teorie pružnosti. Speciálně pro $\mu' = \mu$ platí

$$\tilde{\sigma}_x = -\varkappa\sigma_x - \frac{E}{1-2\mu}\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = -\varkappa\tau_{xy}, \ldots \tag{5.12a}$$

a tedy

$$\tilde{V}_x = \frac{\partial}{\partial x}\varkappa\left(\sigma_x + \frac{E}{1-2\mu}\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\varkappa\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varkappa\tau_{zx}), \tag{5.13a}$$

.....

$$\tilde{p}_x = -\varkappa p_x - n_x\frac{E}{1-2\mu}\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \tag{5.14a}$$

.....

c) Pro rovinnou napjatost (stěny ap.) rovnice zní

$$E\tilde{\varepsilon}_x' = \varkappa\left(\sigma_x - \mu'\sigma_y + E\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right), \tag{5.16}$$

$$E\tilde{\varepsilon}_y' = \varkappa\left(\sigma_y - \mu'\sigma_x + E\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right),$$

$$E\tilde{\gamma}_{xy}' = 2\varkappa(1+\mu')\,\tau_{xy};$$

$$\tilde{\sigma}_x = -\frac{E\tilde{\varepsilon}_x' + \mu E\tilde{\varepsilon}_y'}{1-\mu^2}, \quad \tilde{\sigma}_y = -\frac{E\tilde{\varepsilon}_y' + \mu E\tilde{\varepsilon}_x'}{1-\mu^2}, \tag{5.17}$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = -\frac{E\tilde{\gamma}_{xy}'}{2(1+\mu)},$$

$$\tilde{V}_x = -\frac{\partial\tilde{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\tau}_{yx}}{\partial y}, \quad \tilde{V}_y = -\frac{\partial\tilde{\tau}_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_y}{\partial y}, \tag{5.18}$$

$$\tilde{p}_x = n_x\tilde{\sigma}_x + n_y\tilde{\tau}_{yx}, \quad \tilde{p}_y = n\tilde{\tau}_{xy} + n_y\tilde{\sigma}_y. \tag{5.19}$$

Pro $\mu' = \mu$ je

$$\tilde{\sigma}_x = -\varkappa\sigma_x - \frac{E}{1-\mu}\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = -\varkappa\tau_{xy}, \ldots \tag{5.17a}$$

a tedy

$$\tilde{V}_x = \frac{\partial}{\partial x}\varkappa\left(\sigma_x + \frac{E}{1-\mu}\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\varkappa\tau_{yz}, \ldots \tag{5.18a}$$

$$\tilde{p}_x = -\varkappa p_x - n_x\frac{E\varkappa}{1-\mu}\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \ldots \tag{5.19a}$$

Analogický je postup pro technické řešení desek nebo skořepin, kde za vnitřní síly uvažujeme integrály napětí po ploše, tj. momenty, posouvající síly ap. [Místo analogií lze postup odvodit též přímo z rovnic (5.12) integrací napětí po ploše podle definice momentu ap.]

d) Pro řešení izotropní desky nehomogenní v plošných souřadnicích x, y z hlediska dotvarování, avšak homogenní po tloušťce desky z, platí

$$\tilde{w}_{,xx}' = \frac{-M + \mu' M_y}{(1-\mu'^2)\,D'}, \quad \tilde{w}_{,yy}' = \frac{-M_y + \mu' M_x}{(1-\mu'^2)\,D'}, \tag{5.20}$$

$$\tilde{w}_{,xy}' = -\frac{M_{xy}}{(1-\mu')\,D'};$$

$$\tilde{M}_x = D(\tilde{w}_{,xx}' + \mu\,\tilde{w}_{,yy}'), \quad \tilde{M}_y = D(\tilde{w}_{,yy}' + \mu\,\tilde{w}_{,xx}'),$$

$$\tilde{M}_{xy} = D(1-\mu)\,\tilde{w}_{,xy}'. \tag{5.21}$$

Označení zde je: $w = w(x, y)$ průhybová plocha, $w_{,xx}, \ldots$ její derivace, $M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y$ momenty (zahrnující u předpjaté desky přibližně i momenty od předpětí) a posouvající síly, E, E', μ, μ' pružnostní konstanty dané, popř. transformované a $D = \frac{1}{12}Ed^3/(1-\mu^2)$, $D' = \frac{1}{12}E'd^3/(1-\mu'^2)$. Vnitřní deformaci odpovídá zatížení $\tilde{p}$ povrchu desky

$$\tilde{p} = \frac{\partial^2\tilde{M}_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\tilde{M}_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\tilde{M}_y}{\partial y^2} \tag{5.22}$$

a zatížení okrajů momenty $\tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_{xy}$ a posouvajícími silami $\tilde{T}_x, \tilde{T}_y$, popř. též jejich změnami na čarách nespojitosti $\varkappa = \varkappa(x, y)$. U vetknutých okrajů se zatížení $\tilde{M}_x, \ldots, \tilde{T}_x, \ldots$ přímo ruší s vetknutím, u kloubových okrajů se ruší pouze $\tilde{T}_x, \tilde{T}_y$. Pro $\mu' = \mu$ platí

$$\tilde{M}_x = -\varkappa M_x, \tilde{M}_y = -\varkappa M_y, \tilde{M}_{xy} = -\varkappa M_{xy}, \tag{5.21a}$$

$$\tilde{T}_x = -\varkappa T_x, \tilde{T}_y = -\varkappa T_y;$$

$$\tilde{p} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varkappa M_x) - 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\varkappa M_{xy}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varkappa M_y). \tag{5.22a}$$

e) Řešení válcové skořepiny nehomogenní po ploše z hlediska dotvarování je podle membránové teorie dáno rovnicemi (při čemž x značí souřadnice

povrchové přímky, ψ úhlové souřadnice normály, n_x, n_ψ normálné síly (včetně předpětí), $n_{x\psi}$ smykové síly, ϱ poloměr křivosti, u, v, w posunutí ve směru x, ψ, ϱ a d tloušťku):

$$\frac{1}{2}Ed\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \varkappa\left(n_x - \mu' n_\psi + E\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right) = \tilde{a}, \tag{5.23}$$

$$\frac{Ed}{2\varrho}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\psi} + \tilde{w}\right) = \varkappa\left(n_\psi - \mu' n_x + E\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right) = \tilde{b},$$

$$\frac{1}{4}Ed\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\psi}\right) = \varkappa(1+\mu')\,n_{x\psi} = \tilde{c};$$

$$\tilde{n}_x = -\frac{\tilde{a}+\mu\tilde{b}}{1-\mu^2},\quad \tilde{n}_\psi = -\frac{\tilde{b}+\mu\tilde{a}}{1-\mu^2}, \tag{5.24}$$

$$\tilde{n}_{x\psi} = -\frac{\tilde{c}}{1+\mu};$$

$$\tilde{V}_x = -\frac{\partial\tilde{n}_x}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{n}_{\psi x}}{\partial\psi},\quad \tilde{V}_\psi = -\frac{\partial\tilde{n}_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{n}_\psi}{\partial\psi}, \tag{5.25}$$

$$\tilde{V}_z = -\frac{\tilde{n}_\psi}{\varrho}.$$

Obvod je třeba zatížit silami $\tilde{n}_x, \tilde{n}_\psi, \tilde{n}_{x\psi}$, popřípadě též na čarách nespojitosti $\varkappa$.

f) U nosníku na pružném a dotvarujícím se podkladě v teorii pružnosti platí přetvárné rovnice $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}x^2 = -M/EJ$, $p = kw$, kde $w(x, t)$ je průhybová čára, M ohybový moment včetně vlivu předpětí nosníku, $p(x, t)$ reakce podkladu a k konstanta vyjadřující pružnost podkladu. Rovnice rovnováhy zní $\mathrm{d}^2M/\mathrm{d}x^2 = q - p$, kde $q(x, t)$ je zatížení nosníku. Uvažujeme-li dotvarování v nosníku i v podkladu (koeficienty afinity $\varkappa$, popř. $\varkappa_p$), platí vzhledem k rovnicím $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}x^2 = -M/EJ$, $\tilde{w}' = p/k'$ vztahy $\tilde{M} = -\varkappa M$, $p = -\varkappa_p p$, odkud plyne podle rovnice rovnováhy

$$\tilde{q} = -\varkappa_p p + \varkappa\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = -\varkappa_p q - (\varkappa_p - \varkappa)\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}. \tag{5.26}$$

Účinek zatížení $\tilde{q}$ spolu se zatížením $-\varkappa M$ a $-\varkappa T$ na koncích nosníku a $(\varkappa_2 - \varkappa_1)\,M$, $(\varkappa_2 - \varkappa_1)\,T$ v bodech nespojitosti $\varkappa = \varkappa(x)$ lze vyčíslit z tabulek příčinkových čar pro pružný nosník. Pro štěrkové nebo pískové podloží lze dosadit $\varkappa = 0$. (Účinek dotvarování betonu se projevuje růstem momentů pod osamělými břemeny.)

5.7. Řešení pomocí příčinkových čar

Vnitřní síly vyvolané zatížením — $\tilde{Z}$ lze výhodně určit z příčinkových čar nebo ploch pro pružnou konstrukci. Odpadne tak úloha řešit staticky neurčitou konstrukci. Je to výhodné proto, že pro hlavní typy konstrukcí jsou příčinkové čáry a plochy tabulkovány nebo jsou k dispozici z předcházejícího výpočtu vlivu pohyblivých zatížení na konstrukci (hlavně u mostů). Užití příčinkových funkcí však má význam pouze při větším počtu staticky neurčitých veličin a u okrajových úloh, neboť je při něm v každém kroku nutno určovat všechny vnitřní síly, nejen hodnoty několika staticky neurčitých. Na druhé straně není však nutno počítat koeficienty δ'_{ij}, δ'_i, δ'_{sm_i} transformované konstrukce.

Při výpočtu je vhodné užít dělení prutů na dílky, u plošných konstrukcí dělení sítí, a zatížení spojité nahrazovat osamělými břemeny, jež se určí z vnitřních deformací diferenční metodou — diferenčními vzorci odpovídajícími rovnicím v předcházejícím odstavci. Snadno lze přitom uvažovat nespojitý průběh $\varkappa$.

5.8. Řešení metodou deformační, metodou rozvodu deformace a metodou rozdělování momentů (Crossovou)

Řešíme-li u rámové konstrukce účinek vnitřní deformace $D'_S + D'_{smS}$ některou z těchto metod, lze určit přímo zatížení styčníků nahrazující účinek této vnitřní deformace. Napřed se určí momenty $\tilde{M}_{ik}$, $\tilde{M}_{ki}$, ... a posouvající síly $\tilde{T}_{ik} = (\tilde{M}_{ik} + \tilde{M}_{ki})/l$, ..., které by vznikly na koncích i, popř. k prutu ik vlivem vnitřní deformace D'_S, tj. zakřivení $-\varkappa M/EJ$, kdyby konce prutů byly vetknuté. Platí

$$\tilde{M}_{ik} = \frac{-2EJ}{l}(2\varphi'_{ik} + \varphi'_{ki}),\quad \tilde{M}_{ki} = \frac{-2EJ}{l}(2\varphi'_{ki} + \varphi'_{ik}),\ \ldots$$

kde

$$\varphi'_{ik} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\varkappa M}{EJ}(l-x)\,\mathrm{d}x,\quad \varphi'_{ki} = -\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\varkappa M}{EJ}x\,\mathrm{d}x,\ \ldots$$

U prutu s kloubem v k se vetknutí předpokládá pouze v konci i a je $M'_{ki} = 0$, $M'_{ik} = (3EJ/l)\,\varphi'_{ik}$. Jednoduché je řešení, je-li po délce prutu ik $\varkappa = \varkappa_{ik} =$ = konst. Pak platí $\tilde{M}_{ik} = -\varkappa_{ik}M_{ik}$, $\tilde{M}_{ki} = -\varkappa_{ik}M_{ki}$, $\tilde{T}_{ik} = -\varkappa_{ik}T_{ik}$,

kde $M_{ik}, \ldots$ jsou výchozí vnitřní síly. Účinek vnitřní deformace D'_S na dané pružné konstrukci, tj. síly S', je pak dán řešením rámové konstrukce pro zatížení styčníků momenty $-\tilde{M}_{ik}, -\tilde{M}_{ki}, \ldots$ a posouvajícími silami $-\tilde{T}_{ik}, \ldots$ některou z výše uvedených metod.

Účinek deformace D'_{sm} je při řešení deformační metodou dán řešením rámové konstrukce pro pootočení $\psi'_{sm_{ik}}$ spojnic konců prutů odpovídající smrštěním $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Při řešení Crossovou metodou je třeba účinek smrštění nahradit styčníkovými silami $-\tilde{M}_{sm_{ik}}, -\tilde{M}_{sm_{ki}}, \ldots -\tilde{T}_{sm_{ik}} = -(M'_{sm_{ik}} + M'_{sm_{ki}})/l, \ldots$, vzniklými vlivem pootočení prutů $\psi_{sm_{ik}}, \ldots$ od smrštění $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Pro oboustranně vetknutý prut platí $\tilde{M}_{sm_{ik}} = -(6EJ/l)\,\psi'_{sm_{ik}}$.

Poznámka. Při řešení deformační metodou se hledané styčníkové momenty $M_{ik} + M_{ik_{sm}}$ vyvolané deformací $D'_S + D'_{sm_S}$ vyjádří ve tvaru $M'_{ik} + M'_{ik_{sm}} = (2EJ/l) \times (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik} - 3\psi_{sm_{ik}})$, popřípadě u prutu s kloubem ve styčníku k $(M_{ki} = 0)$ ve tvaru $M'_{ik} + M'_{ik_{sm}} = (3EJ/l)(\varphi_i - \psi_{ik} - \psi_{sm_{ik}})$. Psaním podmínek rovnováhy momentů $\tilde{M}_{ik} + \tilde{M}_{ik_{sm}}, \ldots$ spolu s momenty $\varkappa_{ik}M_{ik}$ ve styčnících a rovnováhy posouvajících sil $T'_{ik} + T'_{ik_{sm}} = -(M'_{ik} + M'_{ik_{sm}} + M'_{ki_{sm}} + M_{ki})/l$ spolu s $\varkappa_{ik}T_{ik}$ v patrech rámu se pak získají podmínečné rovnice pro neznámé $\varphi_i, \ldots \psi_{ik}$.

5.9. Určení deformace mocninnou řadou

Pro deformaci $\delta_X(t)$ ve smyslu dané staticky neurčité veličiny X platí rovnice (4.5), z níž plynou i vyšší derivace ve tvaru $\mathrm{d}^\alpha\delta_X/\mathrm{d}\varphi^\alpha = (\mathrm{d}^\alpha\delta_{el_X}/\mathrm{d}\varphi^\alpha) + (\mathrm{d}^{\alpha-1}\delta'_X/\mathrm{d}\varphi^{\alpha-1})$. Zde značí $\delta_{el_X}(t)$, popř. $\delta'_X(t)$ deformace definované rovnicí (4.4) jako funkce vnitřních sil $S(t)$. Podle rov. (5.2) platí $\mathrm{d}^\alpha S(t_0)/\mathrm{d}\varphi^\alpha = \alpha!\, S_{(\alpha)}$, takže je $\mathrm{d}^\alpha\delta(t_0)/\mathrm{d}\varphi^\alpha = \alpha!\, \delta_{el}(S_{(\alpha)}) + (\alpha - 1)!\, \delta'_{el}(S_{(\alpha-1)})$. Odtud pak podle Taylorovy věty vzhledem ke vztahům $\mathrm{d}^\alpha\delta_{el_X}/\mathrm{d}\varphi^\alpha = \alpha!\, \delta_{el_X}(S_{(\alpha)})$, $\mathrm{d}^\alpha\delta'_X/\mathrm{d}\varphi^\alpha = \alpha!\, \delta'_X(S_{(\alpha)})$ vyplývá

$$\delta_X(t) = \delta_X(t_0) + [\delta_{el_X}(S_{(1)}) + \delta'_X(S_{(0)}) + \delta'_{sm_X}]\,\bar{\varphi} + \sum_{\alpha=2}^{\infty}\left[\delta_{el_X}(S_{(\alpha)}) + \frac{1}{\alpha}\,\delta'_X(S_{(\alpha-1)})\right]\bar{\varphi}^\alpha. \tag{5.27}$$

Omezíme-li se na konečný počet α_0 členů, vznikne chyba, jež podle Taylorova vzorce je $[\mathrm{d}^{\alpha_0+1}(\delta_{el_X}(t_1) + \delta'_X(t_1))/\mathrm{d}\varphi^{\alpha_0+1}]\,\bar{\varphi}^{\alpha_0+1}/(\alpha_0 + 1)!$, kde $t_0 < t_1 < t$. U konstrukce lze členy řady snadno vyjádřit pomocí $X_{i(\alpha)}$ zavedením dalších konstant podle (4.22). Vyjádřením deformace ve tvaru (4.23) se obdrží

$$\delta_{el_X}(S_{(\alpha)}) = \frac{1}{\alpha!}\,\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\varphi^\alpha}\,\bar{\delta}_X(t_0) + \sum_{i=1}^{n}\bar{\delta}_{i_X}X_{i(\alpha)},$$

$$\delta'_X(S_{(\alpha)}) = \frac{1}{\alpha!}\,\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\varphi^\alpha}\,\bar{\delta}'_X(t_0) + \sum_{i=1}^{n}\bar{\delta}'_{i_X}X_{i(\alpha)}. \tag{5.28}$$

5.10. Určení deformace numerickou integrací

Ze vzorce (4.5) psaného pro bod $t^{(m-1)}$ plyne pro diferenční vztah $\delta_X^{(m)} = \delta_X^{(m-1)} + \Delta\delta_X^{(m)}$ přírůstek deformace

$$\Delta\delta_X^{(m)} = \Delta\delta_{el_X}{}^{(m)} + (\delta_X'^{(m-1)} + \delta'_{sm_X})\,\Delta\varphi, \tag{5.29}$$

v němž zbytek lze určit podle vzorce Taylorova. Pro konstrukci lze podle (4.23) odvodit vyjádření pomocí X_i

$$\Delta\delta_{el_X}{}^{(m)} = \Delta\bar{\delta}_X^{(m)} + \sum_{i=1}^{n}\delta_{i_X}\Delta X_i^{(m)}, \quad \delta_X'^{(m)} = \bar{\delta}_X'^{(m)} + \sum_{i=1}^{n}\bar{\delta}'_{i_X}X_i^{(m)}. \tag{5.29a}$$

Přírůstek $\Delta\delta_X^{(m)}$ představuje pružnou deformaci odpovídající změnám vnitřních sil $\Delta S^{(m)}$ (neboli pružnou deformaci vyvolanou na dané pružné konstrukci vnitřními deformacemi $D'^{(m-1)}_S\,\Delta\varphi$, smrštěními $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ a změnou zatížení, polohy podpor, teploty).

Při integraci metodou Runge—Kutta platí obdobně

$$\delta_X^{(m)} = \delta_X^{(m-1)} + \frac{1}{6}\Delta\varphi({}^1\delta_X^{(m)} + 2\,{}^2\delta_X^{(m)} + 2\,{}^3\delta_X^{(m)} + {}^4\delta_X^{(m)}), \tag{5.30}$$

kde ${}^1\delta_X^{(m)}, {}^2\delta_X^{(m)}, \ldots$ jsou deformace odpovídající vnitřním silám ${}^1S^{(m)}, {}^2S^{(m)}, \ldots$ podle tab. 5.3b podobně jako v předešlém případě. Platí pro ně též vztah obdobný jako u (5.29a).

5.11. Přibližné řešení ideálními přetvárnými moduly

Toto řešení, které se v různých speciálních případech (řešení průřezů) v praxi často užívá, vyplývá z přetvárných rovnic pro součtové deformace pružné i dlouhodobé, psaných za přibližného předpokladu, že vnitřní síly

jsou v průběhu času konstantní. Pro jednoduchost uvažujme pouze neměnné zatížení. U staticky neurčité konstrukce obdržíme přetvárné rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} [\delta_{ij} + \delta'_{ij}\overline{\varphi}(t)]\, X_j(t) + \delta_i(t_0) + (\delta'_i + \delta'_{sm_i})\,\overline{\varphi}(t) = 0, \qquad (5.31)$$

při čemž pro počáteční stav platí $\sum_j \delta_{ij} X_{j0} + \delta_i(t_0) = 0$. Dosadíme-li odtud za $\delta_i(t_0)$, obdržíme systém lineárních rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} [\delta_{ij} + \delta'_{ij}\overline{\varphi}(t)][X_j(t) - X_{j0}] + \overline{\varphi}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} X_{j0} + \delta'_i + \delta'_{sm_i}\right) = 0, \qquad (5.31a)$$

z nichž lze vypočíst změny $X_i(t) - X_{j0}$. Nevýhodou tohoto řešení je, že nevede na řešení dané pružné soustavy s inverzní maticí $[\delta_{ij}]^{-1}$, jež bývá obvykle známa již předem. Další nevýhodou je to, že při formulaci (5.31) nejde o konvergující metodu a není proto možno libovolně zpřesňovat řešení jako u numerické integrace zmenšováním dílků.

Tento postup řešení lze snadno též zobecnit na těleso a libovolný pružný systém. Z rov. (5.31) vidíme, že změna vnitřních sil $S(t) - S(t_0)$ od času t_0 do t je přibližně dána jako vnitřní síly vyvolané na konstrukci s moduly pružnosti $E_{id}(t) = E/[1 + \varkappa\overline{\varphi}(t)]$ vnitřními deformacemi $D'_{S_0}\overline{\varphi}(t)$ a smrštěními $\varkappa[\varepsilon_{sm}(\infty)/\overline{\varphi}(\infty)]\,\overline{\varphi}(t)$, kde $D'_{S_0}\overline{\varphi}(t)$ jsou vnitřní deformace ve smyslu sil S odpovídající počátečním vnitřním silám $S(t_0)$ na transformované konstrukci (s konstantami E', μ'). Moduly $E_{id}(t)$ nazveme jako ideální přetvárné moduly a odpovídající konstrukci jako ideální konstrukci.

Řešení pomocí ideální konstrukce umožňuje velmi jednoduše určit vnitřní síly v čase t jako pro pružnou konstrukci s moduly $E_{id}(t)$. Rovnice (5.31) lze totiž přepsat do tvaru

$$\sum_j \delta^{id}_{ij} X_j + \delta^{id}_i + \delta_{sm_i}(t) = 0, \qquad (5.31b)$$

kde δ^{id}_{ij}, δ^{id}_i jsou koeficienty δ_{ij} a δ_i ideální konstrukce, dané výrazy (4.7) a (4.8), v nichž E je zaměněno za E_{id}.

Při složené napjatosti je třeba zavést ještě další ideální pružnostní konstanty μ_{id}, $G_{id} = \frac{1}{2} E_{id}/(1 + \mu_{id})$, které lze odvodit porovnáním ze součtových přetvárných rovnic tělesa pro deformace pružné i dlouhodobé s přetvárnými rovnicemi ideálního tělesa. Získají se vztahy $1/E_{id} = 1/E + \overline{\varphi}/E'$, $\mu_{id}/E_{id} = \mu/E + \overline{\varphi}\mu'/E'$, odkud plyne $E_{id}(t) = E/[1 + \varkappa\overline{\varphi}(t)]$, $\mu_{id}(t) = [\mu + \mu'\varkappa\overline{\varphi}(t)]/[1 + \varkappa\overline{\varphi}(t)]$.

Lze se přesvědčit, že řešení ideálními přetvárnými moduly vyhovuje limitním případům řešení přesného. Poněvadž pro teoretický případ $\overline{\varphi} \to \infty$ je $\lim E_{id}(t)\,\overline{\varphi}(t) = E/\varkappa = E'$, $\lim \mu_{id}(t) = \mu'$, je splněna podmínka, že pro $\overline{\varphi} \to \infty$ se musí obdržet řešení na transformované konstrukci. U jedenkrát staticky neurčitého systému leží tedy $S(t)$ mezi počáteční hodnotou S_0 a partikulární hodnotou S_p, stejně jako u řešení přesného. Obvykle to nastává i u vícekrát staticky neurčitých systémů.

Rovnici (5.31a) je početně výhodnější použít ke zpětnému postupu, tj. k výpočtu X_{i_0} podle požadovaného $X_i(\infty)$. Jejich úpravou totiž obdržíme systém

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}[X_j(\infty) - X_{j0}] + \left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} X_j(\infty) + \delta'_i + \delta'_{sm_i}\right)\overline{\varphi}(\infty) = 0, \qquad (5.31c)$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

který má matici $[\delta_{ij}]$ dané pružné konstrukce. Odtud je též zřejmé, že řešení ideálními moduly odpovídá jednomu kroku polygonální numerické integrace zpět. Co do přesnosti je tedy rovnocenné polygonální integraci.

Poznámka. K řešení ideálními moduly pro $t \to \infty$ lze též dospět, nehledí-li se k předpokladu 2 v odst. 2.2 a považují-li se naopak veškeré dlouhodobé deformace za vratné (což však je předpoklad značně horší), přičemž pro σ = konst je $\varepsilon(\infty, t_0)$ stejné jako podle (2.2) a (2.17). Modul celkové deformace pro $t \to \infty$ pak totiž je právě $E_{id}(\infty)$.

Psaním rov. (5.31a) pro malý dílek $\Delta\varphi$ místo $\overline{\varphi}(t)$ a zavedením členu od změny zatížení na konci dílku se obdrží systém

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + \delta'_{ij}\Delta\varphi)\,\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} X_j^{(m-1)} + \delta_i'^{(m-1)} + \delta'_{sm_i}\right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0,$$
$$(i = 1, \ldots, n) \qquad (5.32)$$

určující $\Delta X_j^{(m)}$ z počáteční hodnoty $X_j^{(m-1)}$ v příslušném dílku. Podle těchto rovnic lze provádět integraci vpřed, jíž je možno nazvat obrácenou numerickou integrací, neboť dosazením $X_j^{(m-1)} = X_j^{(m)} - \Delta X_j^{(m)}$ zjistíme, že hodnotami $\Delta X_j^{(m)}$ je při stálém zatížení totožná s polygonální numerickou integrací vzad podle rov. (5.6). Postup řešení lze zobecnit pro libovolný pružný systém. Též tento postup lze obrátit pro integraci zpět.

5.12. Numerická integrace interpolační

Integrujeme-li rov. (4.9) od $\tau = t_0$ do $\tau = t$, obdržíme systém integrálních rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}[X_j(t) - X_{j0}] + \sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij} \int_{t_0}^{t} X_j(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau) + \int_{t_0}^{t} \delta'_i(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau) + \\ + \delta'_{sm_i} \cdot \overline{\varphi}(t) + \delta_i(t) - \delta_i(t_0) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{5.33}$$

zahrnující též počáteční podmínky. Přibližně jej lze řešit, nahradíme-li průběh $X_j(\tau)$ lineárním interpolačním výrazem $X_j(\tau) \doteq X_{j_0} + [X_j(t) - X_{j_0}]\,\overline{\varphi}(\tau)/\overline{\varphi}(t)$ a dosadíme-li jej do těchto rovnic. Rovnice integrální se tak zjednoduší na algebraické

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta'_{ij}\overline{\varphi}(t)\right][X_j(t) - X_j(t_0)] + \overline{\varphi}(t)\left[\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_{j_0} + {}^s\delta'_i + \delta'_{sm_i}\right] + \\ + \delta_i(t) - \delta_i(t_0) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{5.33a}$$

kde ${}^s\delta'_i$ značí střední hodnotu $\delta'_i(\tau)$ v intervalu $[0, \overline{\varphi}(t)]$. (Podobné řešení viz též [40]). Při lineárním průběhu $\delta'_i(t)$ ve φ je ${}^s\delta'_i = \frac{1}{2}[\delta'_i(t_0) + \delta'_i(t)]$. Přepsáním těchto rovnic pro malý dílek $\Delta\varphi$ obdržíme rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta'_{ij}\Delta\varphi\right)\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m-1)} + \delta_i'^{(m-1)} + \delta'_{sm_i}\right) + \\ + \Delta\delta_i^{(m)} + \frac{1}{2}\Delta\delta_i'^{(m)}\Delta\varphi = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{5.33b}$$

podle nichž lze provádět postup numerické integrace vpřed. Jinou úpravou lze obdržet rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta'_{ij}\Delta\varphi\right)\Delta X_j^{(m)} - \Delta\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m)} + \delta_i'^{(m)} + \delta'_{sm_i}\right) + \\ + \Delta\delta_i^{(m)} - \frac{1}{2}\Delta\delta_i'^{(m)}\Delta\varphi = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{5.33c}$$

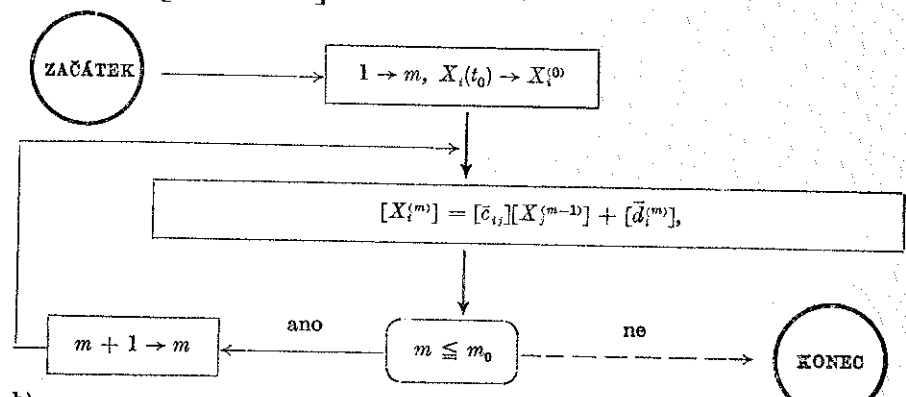
podle nichž lze postupovat zpět. {Stejné rovnice bychom mohli obdržet, kdybychom lineární výraz pro $X_j(\tau)$ dosadili přímo do rovnic (4.9) psaných pro bod $\varphi(t_0) + \frac{1}{2}[\varphi(\infty) - \varphi(t_0)]$.}

Toto řešení nazveme numerickou integrací interpolační. Blokové schéma řešení je na tab. 5.4. Vidíme, že představuje střední cestu mezi rov. (5.6)

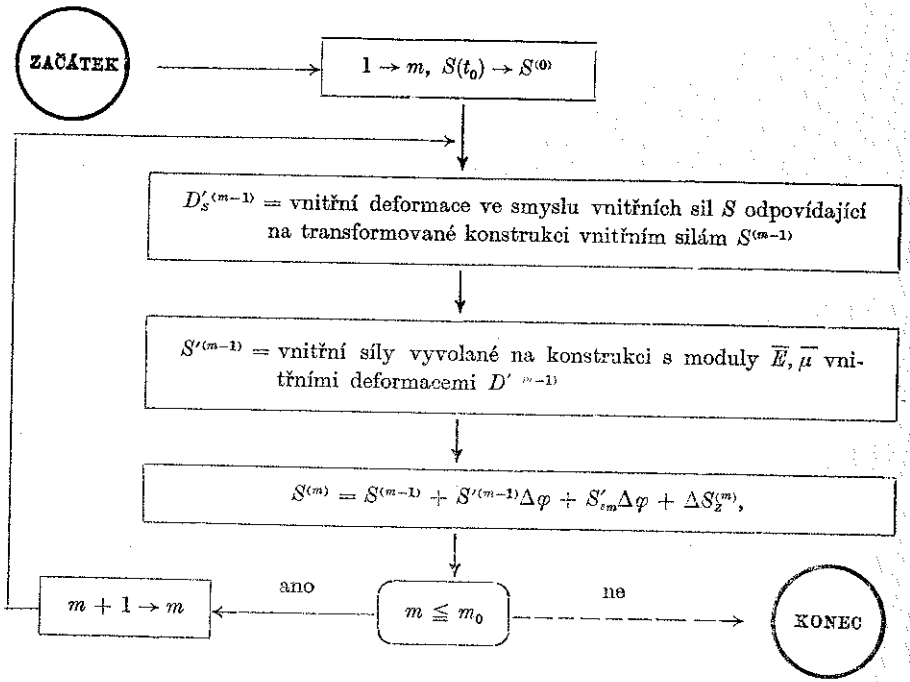
Tabulka 5.4. Blokové schéma pro numerickou interpolační integraci (vpřed)
a) pro staticky neurčitou konstrukci, b) obecně

a) $[\bar{c}_{ij}] = [1] - \Delta\varphi\left[\delta_{ik} + \frac{1}{2}\Delta\varphi\delta'_{ik}\right]^{-1}[\delta'_{kj}]$,

$[\bar{d}_i^{(m)}] = -\left[\delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta\varphi\delta'_{ij}\right]^{-1}[\Delta\varphi(\delta_j'^{(m-1)} + \delta'_{sm_j}) + \Delta\delta_j^{(m)}]$



b)



a (5.31), tj. mezi polygonální integrací vpřed a zpět. Z matematického hlediska je toto řešení speciálním případem obecnější Adamsovy interpolační metody ([38, str. 886]; existuje poměrně dobré omezení chyby).

Při stejné velikosti $\Delta\varphi$ je toto řešení obvykle značně přesnější než integrace polygonální (i obrácená) a je často i přesnější než Rungeho—Kuttova metoda (s ohledem na stejnou pracnost je třeba srovnávat čtyři dílky s jedním dílkem u metody Rungeho—Kuttovy). V mnoha případech zcela postačuje užít jen jeden dílek, tj. postupovat podle (5.33b); je to značně přesnější než řešení ideálními moduly.

Nevýhodou tohoto řešení je však to, že řešení rovnic není dáno maticí $[\delta_{ij}]$ dané pružné konstrukce, takže v případech, kdy soustava je složitá a jsou již známy příčinkové čáry nebo plochy nebo inverzní matice $[\delta_{ij}]^{-1}$, je vhodnější postupovat integrací polygonální.

Výrazy $\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta'_{ij}\,\Delta\varphi$, $\delta_i + \frac{1}{2}\delta'_i\,\Delta\varphi$ představují deformace na konstrukci, jež místo modulů E má moduly $\overline{E} = E/(1 + \frac{1}{2}\varkappa\,\Delta\varphi)$. Z toho zjištění přímo plyne, že řešení lze provádět podle tab. 5.2a, zamění-li se δ_{ij} a δ_i za uvedené výrazy. Řešení lze dále zobecnit i na tělesa. Platí zde postup podle tab. 5.2b, jestliže se všude místo dané pružné konstrukce s konstantami E, μ, G uvažuje konstrukce s moduly $\overline{E} = E/(1 + \frac{1}{2}\varkappa\,\Delta\varphi)$ a s konstantami $\overline{\mu} = (\mu + \frac{1}{2}\mu'\varkappa\,\Delta\varphi)/(1 + \frac{1}{2}\varkappa\Delta\varphi)$, $\overline{G} = \frac{1}{2}\overline{E}/(1 + \overline{\mu})$. Výrazy pro $\overline{\mu}$, $\overline{G}$ lze odvodit podle (3.3).

Poznámka. Při odvození této metody lze vyjít též přímo z rov. (2.5), dosadí-li se za $\sigma_x(\tau)$ lineární interpolační výraz. Obdrží se tím

$$E\varepsilon_x \doteq \sigma_x + \frac{1}{2}(\sigma_{x_0} + \sigma_x)\overline{\varphi} = \sigma_{x_0}(1 + \overline{\varphi}) + (\sigma_x - \sigma_{x_0})\left(1 + \frac{1}{2}\overline{\varphi}\right).$$

Je-li zatížení proměnné, musí jeho proměna být v dílcích plynulá (nejlépe lineárně ve φ). Náhlé změny zatížení na hranici dílku je třeba počítat na dané pružné konstrukci (s moduly E, μ).

V případě, kdy nejde o změnu statického působení ani o posuv podpor a změnu teploty, tj. veškeré zatížení bylo zavedeno až na definitivní soustavě, nelze řešení obdržet prostě zatížením konstrukce s moduly $\overline{E}$, $\overline{\mu}$, $\overline{G}$. To je tedy jediný případ, kdy řešení ideálními moduly je jednodušší (při menší přesnosti). Při nahrazení dané pružné konstrukce za konstrukci s moduly $\overline{E}$, $\overline{\mu}$, $\overline{G}$ platí pro řešení i odstavce 5.6, 7, 8 a výpočet deformace podle 5.10. Při vyjádření zatížení přímo pomocí S jako v rov. (5.10), (5.13a), ... je zde však třeba místo $\varkappa S$ dosazovat $S\overline{E}/E' = S\varkappa/(1 + \frac{1}{2}\varkappa\Delta\varphi)$.

Příklad 5.12.1. Řešme účinek smršťování u montovaného sdruženého symetrického rámu podle obr. 4.8. Rám je pro symetrické zatížení 3krát staticky neurčitý. Při řešení deformační metodou stačí volit za neznámou pootočení φ_a styčníku a. Nechť pro příčel je $\varkappa = 1$, stojky nechť jsou starší a mají $\varkappa_1 = 0{,}60$; $\overline{\varphi}(\infty) = 1{,}24$, $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) = -3 \cdot 10^{-4}/4$. Dále nechť tuhost příčle je $EJ = 1{,}250 \cdot 10^5$ Mp m² a u stojek $E_1J_1 = 0{,}630 \cdot 10^5$ Mp m²; $l = 10{,}0$ m, $h = 4{,}0$ m. Zvolíme dělení na dva dílky $\Delta\varphi = 0{,}62$. Pak je $E/\overline{E} = 1 + \frac{1}{2}0{,}62 = 1{,}310$, $E_1/\overline{E}_1 = 1 + \frac{1}{2}0{,}60 \cdot 0{,}62 = 1{,}186$; $\overline{E}J = 1{,}250 \cdot 10^5/1{,}310 = 0{,}955 \cdot 10^5$ Mp m², $\overline{E}_1J_1 = 0{,}630 \cdot 10^5/1{,}186 = 0{,}532 \cdot 10^5$ Mp m²; $2\overline{E}J/l = 19\,100$ Mp m, $2\overline{E}_1J_1/h = 26\,600$ Mp m.

Pro *první dílek* jsou výchozí hodnoty vnitřních sil nulové. Styčníková rovnice zní $(19\,100 + 26\,600)\,2\,\Delta\varphi_a^{(1)} - 3 \cdot (10{,}0/4{,}0) \cdot (3 \cdot 10^{-4}/4)\,0{,}62 \cdot 26\,600 = 0$, odkud plyne $2\Delta\varphi_a^{(1)} = 2{,}03 \cdot 10^{-4}$. Pak je $M_{ab}^{(1)} = \Delta M_{ab}^{(1)} = -M_{ac}^{(1)} = -\Delta M_{ac}^{(1)} = 19\,100 \cdot 2{,}03 \cdot 10^{-4} = 3{,}88$ Mp m.

Druhý dílek: $\varkappa(E/\overline{E})\,M_{ab}^{(1)} = 1 \cdot 3{,}88/1{,}31 = 2{,}96$ Mp m, $\varkappa_1(E_1/\overline{E}_1)\,M_{ac}^{(1)} = -0{,}60 \cdot 3{,}88/1{,}186 = -1{,}96$ Mp m. Styčníková rovnice zní $2{,}96 - 1{,}96 + (19\,100 + 26\,600)\,2\,\Delta\varphi_a^{(2)} - 3(10{,}0/4{,}0)\,(3 \cdot 10^{-4}/4) \cdot 0{,}62 \cdot 26\,600 = 0$; $2\,\Delta\varphi_a^{(2)} = 1{,}81 \cdot 10^{-4}$. Odtud je $\Delta M_{ab}^{(2)} = -\Delta M_{ac}^{(2)} = 19\,100 \cdot 1{,}81 \cdot 10^{-4} = 3{,}46$ Mp m.

Výsledek je tedy $M_{ab\infty} = -M_{ac\infty} = 2M_{ba\infty} = -2M_{ca\infty} = 3{,}88 + 3{,}46 = 7{,}34$ Mp m. (Kdyby rám byl homogenní, tj. $\varkappa_1 = 1$, vyšlo by $M_{ab\infty} = 5{,}57$ Mp m.)

5.13. Numerická integrace relaxační

Polygonální numerická integrace odpovídá přetvárným podmínkám psaným pro deformace za předpokladu konstantního stavu vnitřních sil po dobu Δt. Jiný postup lze odvodit z hodnot relaxace vnitřních sil, předpokládá-li se po krátkou dobu $\Delta t^{(m)}$ konstantní stav deformace, což bylo již řešeno v odst. 4.10. Změny vnitřních sil vzniklé relaxací za předpokladu konstantního stavu deformace označme $\Delta\tilde{S}^{(m)}$. Po uplynutí doby $\Delta t^{(m)}$ se uvolní stav deformace, čímž v konstrukci vzniknou změny vnitřních sil $\Delta S^{(m)}$, jež přibližně (v limitě pro $\Delta t \to 0$) vyjadřují účinek dotvarování a smršťování.

Označíme-li $\Delta\tilde{Z}^{(m)}$ zatížení, jež podle diferenciálních a okrajových podmínek rovnováhy tělesa odpovídá vnitřním silám $\Delta\tilde{S}^{(m)}$, a jako $\Delta\overline{S}^{(m)}$ vnitřní síly, jež jsou na dané pružné konstrukci vyvolány zatížením $-\Delta\tilde{Z}^{(m)}$, je účinek dotvarování a smršťování za dobu $\Delta t^{(m)}$ dán změnami vnitřních sil $\Delta S^{(m)} = \Delta\tilde{S}^{(m)} + \Delta\overline{S}^{(m)}$.

U tohoto řešení budeme pro jednoduchost uvažovat pouze případ $\mu' \doteq \mu$. Podle rov. (4.34) plyne, že $\Delta\tilde{S}^{(m)}$ se rovnají $(1 - e^{-\varkappa\Delta\varphi})$-násobku vnitřních sil $S^{(m-1)}$ plus vnitřních sil, jež by vznikly vlivem smrštění $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)\ \varphi(\infty)$ podle teorie pružnosti. Označíme-li $E'' = E/\varkappa''$ nové moduly pružnosti, kde $\varkappa'' = (1 - e^{-\varkappa\Delta\varphi})/(1 - e^{-\Delta\varphi})$, a $\tilde{D}_S''$ vnitřní deformaci ve smyslu vnitřních sil S odpovídající při modulech E'' vnitřních silám S a poměrným smrštěním $\varkappa''\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, zjistíme z posledních rovnic, že $\Delta\tilde{S}^{(m)}$ jsou vnitřní síly, jež na dané pružné konstrukci, tj. při modulech E, ruší vnitřní deformace $\tilde{D}_S''(1 - e^{-\Delta\varphi})$.

Tím dostáváme postup podobný předcházejícím numerickým integracím, jejž lze nazvat integrací relaxační. Platí pro ni schéma postupu numerické integrace polygonální (tab. 2a, b), jestliže místo transformované konstrukce s moduly E' uvažujeme konstrukci s moduly $E'' = E/\varkappa''(\mu' \doteq \mu)$ a místo $\Delta\varphi$ uvažujeme $1 - e^{-\Delta\varphi}$. Pro určení $\Delta Z^{(m)}$ platí i zde odstavec 5.6, přičemž však $\varkappa$ je nutno zaměňovat za $\varkappa''$. U konstrukce z prutů lze účinek zatížení $\Delta Z^{(m)}$ určit též výhodně příčinkovými čarami.

Přímé řešení staticky neurčité konstrukce je dáno systémem diferenčních rovnic tvaru (5.6), kde místo δ_{ij}, δ_i' a δ_{sm_i}' je však třeba dosadit hodnoty δ_{ij}'', δ_i'' pro konstrukci s moduly $E'' = E/\varkappa''$ a $\delta_{sm_i}''\Delta\varphi$ pro smrštění $(1 - e^{-\varkappa\Delta\varphi})\ \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Výhodou řešení je, že matice systému je $[\delta_{ij}]$, tj. matice dané pružné konstrukce. Deformace ve smyslu X_i lze stanovit přímo z momentových ploch redukovaných násobitelem $1 - e^{-\varkappa\Delta\varphi}$ a ze smrštění $(1 - e^{-\varkappa\Delta\varphi})\ \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

Obdobně by bylo možno odvodit i postup relaxační numerické integrace zpět. Byl by shodný s předcházejícím řešením, s tím jediným rozdílem, že místo $S^{(m-1)}$ se uvažuje $S^{(m)}$ a místo $1 - e^{-\varkappa\Delta\varphi}$ a $1 - e^{-\Delta\varphi}$ se uvažuje $e^{\varkappa\Delta\varphi} - 1$ a $e^{\Delta\varphi} - 1$.

Poznámka. V limitě pro $\Delta\varphi \to 0$ jsou všechny metody za předpokladu konvergence totožné s integrací polygonální. V souhlase s tím pro $\Delta\varphi \to 0$ je zde $\lim\ (1 - e^{\Delta\varphi})/\Delta\varphi = 1$ a $\lim\ \varkappa'' = \varkappa$. Vyjádří-li se funkce $e^{-\Delta\bar{\varphi}}$ mocninnou řadou a ponechají-li se pouze prvé dva členy, dostáváme postup numerické integrace polygonální.

Poněvadž pro $\varkappa = \text{konst}$ funkce $1 - e^{-\varkappa\bar{\varphi}}$ udává podle rov. (3.6) proměnu vnitřních sil homogenní konstrukce, dává relaxační numerická integrace přesné řešení vnitřních sil pro homogenní konstrukci, tj. pro $\varkappa = \text{konst}$ (stačí zde tedy volit jen jeden dílek $\Delta\varphi = \bar{\varphi}(\infty)$). Naproti tomu polygonální numerická integrace dává v tomto případě jen přibližné řešení. Poskytuje však naopak přesné řešení deformace u staticky určité konstrukce, kdežto

relaxační integrace nikoliv. Z toho vyplývá, že této metody je vhodné užít u málo nehomogenních konstrukcí, tj. u konstrukcí, kde je buď $\varkappa$ málo proměnné (malé rozdíly stáří), nebo část s odlišným $\varkappa$ je malá a má malou tuhost. Přitom je účelná pouze tehdy, jedná-li se převážně o relaxaci napětí, tj. o vliv změny statického působení, posuvu podpor, změny teploty, předpětí, rektifikace a smršťování a nikoliv o vliv nehomogenity. Pozná se to tím, že se nesmí jednat o případ, kdy účinek odpovídající veličiny by na homogenní konstrukci byl nulový nebo velmi malý. Dává potom velmi dobré hodnoty. Tak např. se hodí u letmo betonovaných mostů pro reakci konzoly na opěře krajního pole, ne však pro posouvající sílu v kloubu středního pole. Pro konstrukce, kde beton spolupůsobí s většími ocelovými částmi, se v žádném případě nehodí. (Visutý most, oblouk s táhlem ap.)

Poznámka. Pro $\varkappa \to$ konst se musí odchylka od přesného řešení blížit k nule (vždy pouze v absolutní hodnotě). Poměrná odchylka vůči přesnému řešení se pro $\varkappa \to 1$ může blížit k libovolné hodnotě, když $\lim \Delta X = 0$ pro $\varkappa \to$ konst, tj. když účinek na odpovídající veličinu homogenní konstrukce je nulový, neboť se pak jedná o limitu typu 0/0.

Právě vyložený postup je shodný s polygonální integrací v tom, že vnitřní síly $\Delta S^{(m)}$ se určují ze zatížení $-\Delta Z^{(m)}$ na dané pružné konstrukci. Přesnější by při daném dílku $\Delta\varphi$ bylo, určovat je na konstrukci s moduly $\bar{E}$ jako při integraci interpolační. Dostáváme tak postup *relaxační interpolační numerické integrace*. Zřejmě platí pro něj opět schémata podle tab. 5.2a, b, kde však místo transformované konstrukce s moduly E' je třeba uvažovat konstrukci s moduly $E'' = E/\varkappa''$ a smrštění $\varkappa''\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ a místo řešení dané pružné konstrukce s moduly E řešit konstrukci s moduly $\bar{E}$. Pro případy převážně relaxace napětí a malé nehomogenity je to většinou nejpřesnější způsob numerické integrace.

5.14. Užití partikulárního řešení

Při konstantním zatížení lze u staticky neurčité konstrukce z rovnice všech přibližných metod snadno vyloučit členy od vnějšího zatížení a smrštění, vypočteme-li je z rov. (4.15) pro partikulární řešení a dosadíme. Tak např. pro polygonální numerickou integraci dostaneme rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}'(X_j^{(m)} - X_{j_p}) = 0 \qquad (5.6b)$$

a podobně u ostatních metod. Partikulární řešení je však vhodné užít pouze tehdy, je-li již předem známo, neboť jinak by jeho určení představovalo početní práci navíc. (Z rovnic (5.6b) je též názorně vidět, že vnitřní síly se v čase nemění pouze tehdy, rovnají-li se partikulárním hodnotám. Jinak se s postupem času blíží k partikulárním hodnotám, a to tím pomaleji, čím jsou jim blíže. Nedosáhnou jich však, neboť hodnota $\overline{\varphi}(\infty)$ je konečná.)

V některých případech se u staticky neurčitého systému projevují vzájemné vlivy staticky neurčitých veličin velmi málo, tj. koeficienty δ_{ij}, δ'_{ij} pro $i \neq j$ jsou relativně malé vůči δ_{ii}, δ'_{ii}. Potom je možno pro výpočet veličiny X_i přibližně uvažovat základní statickou soustavu jako $(n-1)$krát staticky neurčitou soustavu vzniklou zrušením jediné vazby X_i, i když její části jsou nehomogenní. Systém (4.9) tím přejde v jedinou rovnici, jejíž řešení je

$$X_i(t) = X_{i_p}(t) + [X_{i_0} - X_{i_p}(t_0)]\, \mathrm{e}^{-(\delta'^{\bullet}_{ii}/\delta^{\bullet}_{ii})\overline{\varphi}(t)} \qquad (5.34)$$

kde $\delta'^{\bullet}_{ii}$, $\delta^{\bullet}_{ii}$ jsou pružnostní koeficienty pro základní soustavu $(n-1)$krát staticky neurčitou. Případně bylo by možno užít soustavy $(n-2)$krát staticky neurčité, jež vede na systém dvou rovnic ap. Někdy lze též místo $\delta'^{\bullet}_{ii}/\delta^{\bullet}_{ii}$ hruběji dosadit δ'_{ii}/δ_{ii}. Vzorec (5.34) lze např. užít u letmo betonovaných rámových mostů s dosti tuhými pilíři, nelze jej však užít např. u zavěšených betonových trámových mostů. Dává přesné řešení pro homogenní konstrukci ($\varkappa = \text{konst}$, $\delta'^{\bullet}_{ii}/\delta^{\bullet}_{ii} = -\varkappa$).

5.15. Malá změna počátečních podmínek

Nevýhodou přibližných řešení při užití běžných početních pomůcek je, že pro každý jednotlivý počáteční stav je nutno celý výpočet opakovat na rozdíl od obecného řešení v kapitole 4. Je-li však tato změna malá, je vhodné podle principu superpozice vypočíst vliv této změny zvlášť a výsledek přičíst, neboť to je možno provést již s mnohem menší poměrnou přesností. Je-li tedy vypočteno $S(t)$ pro dané S_0 a chceme-li určit $S^*(t)$ pro S_0^*, přičemž rozdíly $S_0^* - S_0$ jsou vůči S_0 relativně malé, vypočte se daná úloha pro počáteční hodnoty $S_0^* - S_0$, ovšem již na konstrukci bez zatížení a bez smršťování. Stačí k tomu většinou jen jeden dílek některé numerické integrace. Též užití přibližného vzorce (5.34) je zde často vhodné.

Je-li známo portikulární řešení, stačí pro hrubý odhad vztah $S^*(t) - S(t) = (S_0^* - S_0)\,(S_0^* - S_p)/(S_0 - S_p)$, vyplývající z předpokladu afinity křivek $S(t)$ a $S^*(t)$ při ose v partikulárním řešení S_p.

5.16. Praktické použití jednotlivých metod a výpočet na samočinných počítačích

Pro praxi je většinou nejvhodnější numerická integrace, a to hlavně integrace polygonální nebo integrace podle Runge—Kutta. Velikost dílku lze volit u prvé metody asi $\Delta\varphi = 0{,}04$ až $0{,}1$ při výpočtu na samočinném počítači a $0{,}2$ až $0{,}4$ při výpočtu běžnými pomůckami vzhledem k pracnosti. Výpočet jednoho kroku u druhé metody vyžaduje sice přes čtyřikrát více početní práce, avšak přesnost výpočtu je mnohokrát vyšší. Stačí volit dílky asi $0{,}2$ až $0{,}4$, při výpočtu běžnými pomůckami popřípadě i $1{,}0$ až $2{,}0$, tj. i jen jeden dílek.

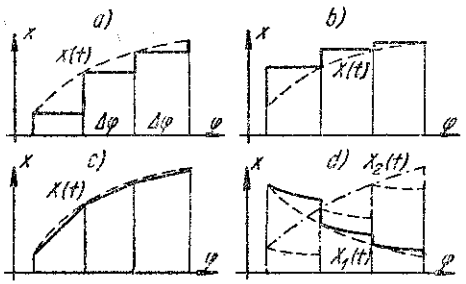
Integrace rozvojem v mocninnou řadu (nebo postupnými aproximacemi) jsou vhodné tam, kde je třeba získat analytický výraz pro průběh vnitřních sil pro některé další výpočty. Z tohoto výrazu lze snadno určit hodnoty v libovolném čase a hodnoty vyšších derivací. Dává přesnější hodnoty pro menší $\overline{\varphi}$. Pro velká $\overline{\varphi}$ ($\overline{\varphi} > 1$) jsou odchylky značné, nebo řešení vůbec nekonverguje. Prakticky je třeba vypočíst členy asi do 3. až 8. řádu, na samočinném počítači ovšem více.

Numerická integrace i integrace rozvojem v řadu má významnou vlastnost, že v jednotlivých krocích se opakuje řešení téže dané pružné konstrukce. U staticky neurčité soustavy to má např. ten význam, že řešení je dáno vždy touž inverzní maticí $[\delta_{ij}]^{-1}$, jež bývá většinou již známa předem z výpočtu příčinkových čar. Převodem vnitřní deformace na zatížení lze k řešení dané pružné konstrukce užít příčinkových čar nebo ploch, jež pro mnohé případy jsou sestaveny v tabulkách. Opakování stejného početního postupu v jednotlivých dílcích činí uvedené metody zvláště vhodné pro samočinné počítače.

Numerická integrace relaxační, vedoucí též k řešení dané pružné konstrukce (matice $[\delta_{ij}]^{-1}$), je vhodná při výpočtu běžnými pomůckami tehdy, kdy jde převážně o relaxaci napětí u málo nehomogenní konstrukce (beton nespolupůsobí s ocelí, rozdíly stáří méně než 1 rok; vliv posuvu podpor, změny teploty, statického působení nebo smršťování.) Potom stačí volit asi $\Delta\varphi = 0{,}5$ až 2 (1 až 3 dílky) a chyba je velmi malá.

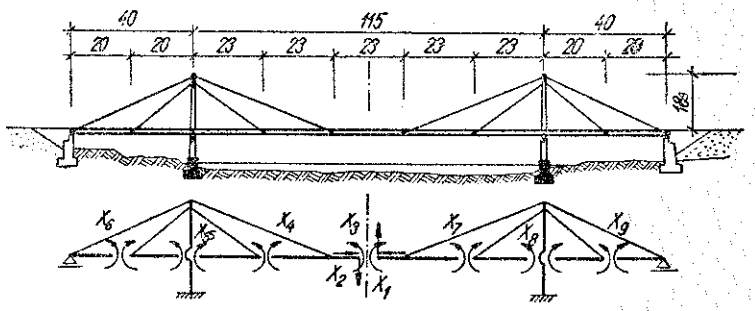
Ze všech metod je z hlediska přesnosti při stejné početní práci obvykle nejvýhodnější numerická integrace interpolační podle odst. 5.13. Často u ní stačí užít jen jeden dílek $\Delta\varphi = \overline{\varphi}(\infty)$. Na rozdíl od předcházejících metod však nevede na řešení dané pružné konstrukce s maticí $[\delta_{ij}]$, takže u složitějších konstrukcí, jsou-li předem k dispozici příčinkové čáry nebo plochy

nebo inverzní matice $[\delta_{ij}]^{-1}$, nemá smysl ji použít. Pro řešení složených průřezů a konstrukcí s pruty složených průřezů, homogenními po délce prutů, je to nejvhodnější přibližná metoda (obvykle stačí 1 až 3 dílky). Jedná-li se převážně o relaxaci napětí u málo nehomogenní konstrukce, je ještě přesnější relaxační interpolační integrace.



Obr. 5.2. Průběh X předpokládaný při jednotlivých numerických integracích vpřed
a) polygonální, b) obrácená (ideální moduly), c) interpolační, d) relaxační (pro X_2 nevhodná)

Přibližné řešení ideálními moduly nebo obrácenou numerickou integrací též nevede na řešení dané pružné konstrukce a co do přesnosti je přibližně rovnocenné polygonální integraci. Účelné jsou jako hrubší řešení, a to tehdy, jde-li o výpočet vlivu zatížení (na nehomogenním systému), které přistoupilo veškeré až v definitivním statickém systému (často např. u složeného průřezu). Jsou-li vzájemné vlivy staticky neurčitých veličin malé, hodí se přibližný vzorec (5.34).



Obr. 5.3. Příklad projektu zavěšeného mostu s betonovým trámem (Dopravoprojekt Praha)

Pro názor o přesnosti různých metod (viz též obr. 5.2) uveďme výsledky, jaké by se získaly jednotlivými způsoby numerické integrace pro jednoduché konstrukce podle příkladu 4.1a, b (obr. 4.2a, b) při použití pouze jediného dílku $\Delta\varphi$. Výsledky jsou uvedeny v tab. 5.5 jako násobek hodnoty: a) $\frac{3}{16}ql$, b) $\frac{3}{8}\ ql$.

Tabulka 5.5

a) Konstrukce podle obr. 4.2a

$\Delta\varphi$	2,0					0,6	0,2
$\varkappa$	1	0,622	0,3	0,1	0	0	0
přesné řešení	1,729	1,420	0,958	0,509	0,228	0,0606	0,0247
polygonální integrace	4,000	2,58	1,376	0,624	0,250	0,0625	0,0250
interpolační integrace	2,000	1,550	0,992	0,515	0,222	0,0606	0,0247
ideální moduly	1,333	1,106	0,970	0,438	0,200	0,0589	0,0244
relaxační integrace	1,729	1,447	0,955	0,478	0,108	0,0492	0,0227
integrace Runge—Kutta	1,333			0,507	0,221		

b) Konstrukce podle obr. 4.2b

přesné řešení	0	0,1873			0,633	0,221	0,0952
polygonální integrace	0	0,378			1,000	0,250	0,1000
interpolační integrace	0	0,209			0,667	0,222	0,0953
ideální moduly	0	0,144			0,500	0,200	0,0910
relaxační integrace	0	0,0764			0,432	0,197	0,0906
integrace Runge—Kutta	0	0,170			0,625		

Je třeba poznamenat, že hledisko přesnosti bylo zde míněno jen matematicky, tj. vzhledem k výchozím předpokladům v kap. 2.

Příkladem moderních konstrukcí se značným vlivem dotvarování a smršťování na vnitřní síly jsou zavěšené betonové trámové mosty. Účinky dotvarování je nutno v návrhu pečlivě propočítat. Přitom jde obvykle o konstrukci mnohokrát staticky neurčitou, takže je nutno užít přibližné metody s výpočtem nejlépe na samočinném počítači. K názoru na velikost účinků uveďme výsledky z návrhu silničního mostu tohoto typu 9krát staticky neurčitého (obr. 5.3), se šikmými závěsnými lany. Změny sil v lanech vyšly max. 7 %, změny extrémních ohybových momentů v trámu průměrně 30 až 40 %, maximálně až 69 % vůči hodnotám od stálého zatížení.

Poznámka. Užití přibližného vzorce podle [6], rov. (19), nebo podle [17] zde není možné pro velké odchylky.

Přibližné metody převádějí problém nehomogenního dotvarování na řadu řešení téže dané pružné konstrukce podle teorie pružnosti pro různé případy obecné vnitřní deformace nebo zatížení, takže problém lze považovat za quasistatický. Z toho plyne, že každá úloha početně řešitelná pro obecné zatížení objemovými a povrchovými silami podle teorie pružnosti je početně řešitelná i pro nehomogenní dotvarování a smršťování přibližnou konvergující metodou, jíž lze dosáhnout libovolně malé chyby. Problém dotvarování a smršťování je tím převeden na problém teorie pružnosti a integrace v čase oddělena v jednotlivých krocích od integrace v prostorových souřadnicích.

6. Konstrukce s nehomogenními průřezy

Konstrukce mohou být nehomogenní nejen po délce prutů, po ploše desek apod., ale též v jednotlivých jejich průřezech, spolupůsobí-li v nich beton různého stáří, nebo beton a ocel. Jsou to v praxi nejčastější případy. Beton různého stáří v průřezech se vyskytuje u montovaných konstrukcí, u nichž na prefabrikovaných nosnících se dodatečně vybetonuje horní deska (obr. 6.3a), nebo u trámů a oblouků betonovaných postupně po věncích na samonosné výztuži (obr. 6.4) ap. Spolupůsobení oceli a betonu vedle tradičních průřezů železobetonových vzniká u spřažených nosníků ocelobetonových (obr. 6.3b) a nosníků z předpjatého betonu.

Rozdělení vnitřních sil v průřezu je úloha staticky neurčitá. Napřed se budeme zabývat řešením průřezů za předpokladu, že zatížení průřezu ohybovým momentem a normálnou silou je známé. U většiny konstrukcí staticky neurčitých je to jen přibližný předpoklad, neboť, jak později ukážeme, statická neurčitost konstrukce (vnější) se prolíná s vnitřní statickou neurčitostí průřezů. Nehomogenita průřezů ovlivňuje proto též přesuny vnitřních sil mezi průřezy a konstrukce s nehomogenními průřezy spolupůsobí jako celek. Zatížení průřezu je obecně proměnné i při stálém zatížení konstrukce.

V teorii pružnosti je technické řešení ohybu prutů, popř. desek založeno na Navierově (Bernoulliho) zjednodušující hypotéze o zachování rovinných průřezů, popř. na Kirchhoffově hypotéze o zachování přímých a kolmých normál, jež převádějí třírozměrný problém na jednorozměrný, popř. dvourozměrný. Tato hypotéza je splněna přesně pouze tehdy, jsou-li ohybové momenty po délce prutu nebo po ploše desky konstantní. Právě tak musí být tato hypotéza přesně splněna i za dotvarování a smršťování (neboť při konstantních ohybových momentech musí zřejmě být přetvoření v okolí každého

průřezu souměrné podle jeho roviny). Proto přijmeme hypotézu rovinných průřezů (popř. kolmých normál) i pro dotvarování a smršťování.

6.1. Průřez prutu složený z homogenních částí

V praxi se vyskytují prakticky jen pruty o průřezech, jež se skládají z homogenních částí. Uvažujme proto průřez souměrný podle svislé osy z (roviny momentu), složený z m částí homogenních z hlediska dotvarování a smršťování a zatížený ohybovým momentem $M(t)$ a normálnou silou $N(t)$. Různé speciální případy této úlohy byly již různými způsoby řešeny v četných pracích [10], [12], [14], [18], [25], [33], [47], [49], [54], [7] aj.

Dále budeme (vyjma odst. 6.9) předpokládat, že v žádné části betonu nevzniká tah. Není-li tomu tak, vznikne trhlina a přerušenou část průřezu nelze uvažovat. Početně je to však složité, neboť konec trhliny se s časem posouvá a průřez se tedy mění.

Rozdělení vnitřních sil po průřezu je dáno ohybovými momenty $M_1(t)$, $M_2(t)$, ..., $M_m(t)$ a normálnými silami $N_1(t)$, $N_2(t)$, ..., $N_m(t)$ působícími na jednotlivé homogenní části průřezu v jejich těžištích. Tyto síly musí být v rovnováze s vnějším zatížením průřezu $N(t)$, $M(t)$ (moment je vztažen k působišti normálné síly, za nějž se obvykle volí těžiště složeného pružného průřezu). Protože podmínky rovnováhy momentů jsou dvě — silová a momentová — a neznámých vnitřních sil $M_i(t)$, $N_i(t)$ je $2m$, je řešení průřezu složeného z m částí $2(m-1)$krát vnitřně staticky neurčité a vede proto na systém $2(m-1)$ lineárních diferenciálních rovnic tvaru (4.9). Z vnitřních sil $M_i(t)$, $N_i(t)$, působících na jednotlivé části, lze určit napětí známými vzorci $\sigma_i(t) = M_i(t)\, z/J_i + N_i(t)/F_i$.

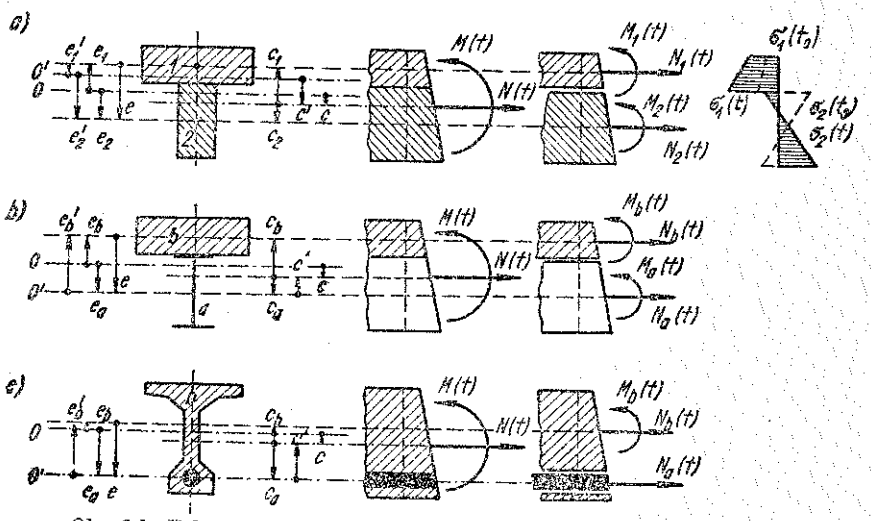
Podle odst. 4.1. a 3.4 zachovává dotvarování a smršťování rovinnost homogenních částí průřezu. Aby byla zachována rovinnost složeného průřezu jako celku, je nutno a stačí, aby relativní deformace každých dvou částí ve smyslu veličin $M_i(t)$, $N_i(t)$ byla nulová (neboť přímka je určena jedním bodem a úhlem). Takových podmínek stačí celkem $2(m-1)$. Jsou to přetvárné výminky (kompatibility) složeného průřezu. Souhrn částí průřezu od sebe oddělených, avšak vázaných dvěma podmínkami rovnováhy složeného průřezu, tvoří základní statickou soustavu pro řešení problému. Deformace jednotlivých částí ve smyslu veličin $M_i(t)$ a $N_i(t)$ je nutno vyjadřovat s ohledem na podmínky rovnováhy. Z $2m$ veličin $M_i(t)$, $N_i(t)$ volíme $2(m-1)$ za staticky neurčité, přičemž zbývající dvě jsou s nimi vázány podmínkami rovnováhy.

Postup řešení ukažme na průřezu složeném ze dvou homogenních částí podle obr. 6.1a ($m = 2$), který je v praxi převážně se vyskytujícím případem. Tento průřez je 2krát vnitřně staticky neurčitý.

Moduly pružnosti částí označme E_1, E_2, koeficienty afinity dotvarování $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Jejich plochy, centrální momenty setrvačnosti a poloměry setrvačnosti označme E_1, J_1, i_1, popř. E_2, J_2, i_2, kteréžto hodnoty jsou vesměs > 0. Vzdálenost těžišť obou částí označme e. Jednotlivé části mají od neutrální osy celého daného průřezu (E_1F_1, E_2F_2), popř. transformovaného průřezu ($E_1'F_1$, $E_2'F_2$) exentricity e_1, e_2, popř. e_1', e_2'. Průřez nechť je zatížen momentem $M(t)$ a normálnou silou $N(t)$, působící ve vzdálenostech c_1 nebo c_2 od těžišť částí průřezu a ve vzdálenosti c nebo c' od neutrální osy pružného anebo transformovaného průřezu. Všechny tyto délky zavádíme se znaménkem patrným z obr. 6.1 (kladný smysl shora dolů), aby značení mělo platnost pro všechny druhy průřezů.

Mezi zavedenými veličinami platí geometrické vztahy

$$c_2 - c_1 = e_2 - e_1 = e_2' - e_1' = e, \qquad (6.1)$$
$$c = e_1 - c_1 = e_2 - c_2, \quad c' = e_1' - c_1 = e_2' - c_2$$



Obr. 6.1. Nehomogenní souměrný průřez nosníku, složený ze dvou částí
a) obecný průřez, b) spřažený ocelobetonový průřez, c) průřez z předpjatého betonu
o ... neutrální osa průřezu (E_1F_1, E_2F_2), o' ... neutrální osa průřezu ($E_1'F_1$, $E_2'F_2$)

a statické vztahy

$$E_1F_1e_1 + E_2F_2e_2 = 0, \quad E_1'F_1e_1' + E_2'F_2e_2' = 0. \tag{6.2}$$

Je-li $N(t) = 0$, lze volit např. $c_1 = 0$, $c_2 = e$. Průřezové síly obou částí musí být ekvivalentní s celkovými průřezovými silami, což dává rovnice rovnováhy průřezu

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad M(t) = M_1(t) + M_2(t) + N_1(t)\,c_1 + N_2(t)\,c_2. \tag{6.3}$$

Za staticky neurčité veličiny zvolíme např. $M_1(t)$, $N_1(t)$. Základní soustava je tvořena navzájem oddělenými částmi průřezu, vázanými však podmínkami rovnováhy (6.3). Podle (4.9) platí pro ně obecně systém dvou přetvárných rovnic tvaru

$$\delta_{1_{MM}}\frac{\mathrm{d}M_1(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta_{1_{MN}}\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{1_{MM}}M_1(t) + \delta'_{1_{MN}}N_1(t) + \\ + \delta'_{1_M}(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_{1_M}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_{1_M}} = 0, \tag{6.4}$$

$$\delta_{1_{MN}}\frac{\mathrm{d}M_1(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta_{1_{MN}}\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{1_{MN}}M_1(t) + \delta'_{1_{NN}}N_1(t) + \\ + \delta'_{1_N}(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_{1_N}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_{1_N}} = 0,$$

jejichž koeficienty musí vyjadřovat podmínku, že deformace základní soustavy ve smyslu veličin M_1, N_1 neboli rozdíly deformací obou částí ve smyslu M_1, N_1 jsou nulové.

Koeficienty systému se určí podle teorie pružnosti. Lze to nejsnáze provést na základě principu virtuálných prací podle nezávislých rovnováhových stavů základní soustavy.

Při zatížení $M_1 = 1$, $N_1 = 0$ vznikají podle rov. (6.3) v základní soustavě [při $M(t) = N(t) = 0$] vnitřní síly $M_2 = -1$, $N_2 = 0$. Odpovídající deformace ve smyslu M_1, N_1, M_2, N_2 po řadě jsou $1/E_1J_1$, 0, $-1/E_2J_2$, 0.

Při zatížení $M_1 = 0$, $N_1 = 1$ jsou podle rov. (6.3) [při $M(t) = N(t) = 0$] vnitřní síly v základní soustavě $M_2 = e$, $N_2 = -1$. Odpovídající deformace ve smyslu M_1, N_1, M_2, N_2 po řadě jsou: 0, $1/E_1F_1$, e/E_2J_2, $-1/E_2F_2$.

Danému vnějšímu zatížení $M(t)$, $N(t)$ odpovídají podle (6.3) na základní soustavě při $M_1 = 0$, $N_1 = 0$ ve smyslu M_1, N_1, M_2, N_2 po řadě deformace 0, 0, $[M(t) - N(t)\ c_2]/E_2J_2$, $N(t)/E_2F_2$. Poměrná smrštění $\varkappa_1\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$,

popř. $\varkappa_2\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ představují deformace základní soustavy ve smyslu N_1, popř. N_2.

Podle principu virtuálných prací je deformace základní soustavy ve smyslu M_1 nebo N_1 od daného zatížení rovna virtuální práci vnitřních sil od zatížení $\overline{M}_1 = 1$ nebo $\overline{N}_1 = 1$ základní soustavy na deformacích od daného zatížení. Podle toho např. je $\overline{1}\,.\,\delta_{1_{MN}} = (1/E_1J_1)\,.\,0 + 0\,.\,1 + (-1/E_2J_2)\,e + 0\,.\,(-1)$. Tímto způsobem lze určit pro daný pružný a pro transformovaný průřez

$$\delta_{1_{MM}} = \frac{1}{E_1J_1} + \frac{1}{E_2J_2}, \quad \delta_{1_{MN}} = -\frac{e}{E_2J_2},$$

$$\delta_{1_{NN}} = \frac{1}{E_1F_1} + \frac{e^2}{E_2J_2} + \frac{1}{E_2F_2}; \tag{6.5}$$

$$\delta'_{1_{MM}} = \frac{\varkappa_1}{E_1J_1} + \frac{\varkappa_2}{E_2J_2}, \quad \delta'_{1_{MN}} = -\frac{e\varkappa_2}{E_2J_2},$$

$$\delta'_{1_{NN}} = \frac{\varkappa_1}{E_1F_1} + \frac{e^2\varkappa_2}{E_2J_2} + \frac{\varkappa_2}{E_2F_2}; \tag{6.6}$$

$$\delta_{1_M}(t) = -[M(t) - N(t)\,c_2]\frac{1}{E_2J_2}, \quad \delta'_{1_M}(t) = \varkappa_2\delta_{1_M}(t),$$

$$\delta_{1_N}(t) = -e\,\delta_{1_M}(t) - N(t)\frac{1}{E_2F_2}, \quad \delta'_{1_N}(t) = \varkappa_2\delta_{1_N}(t), \tag{6.7}$$

$$\delta'_{sm_{1_M}} = 0, \quad \delta'_{sm_{1_N}} = (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}. \tag{6.8}$$

Těmito koeficienty je matematicky určeno řešení průřezu a lze je provést podle kapitoly 4.

Poznámka. Koeficienty $\delta_{2_{MM}}, \ldots, \delta'_{2_{MM}}, \ldots$ rovnic pro přímý výpočet $M_2(t)$ a $N_2(t)$ plynou záměnou indexu 1 a 2 a záměnou e za $-e$. Tyto koeficienty poskytují stejnou charakteristickou rovnici, a tedy i tytéž kořeny λ_1, λ_2, o čemž se lze též přesvědčit algebraickými úpravami. Rovnost kořenů λ_1, λ_2 v obou případech je nutná k tomu, aby byly splněny rovnice (6.3).

Počáteční hodnoty $M_1(t_0)$, $N_1(t_0)$ jsou dány buď hodnotami na začátku zavedenými, nebo hodnotami od vnějšího zatížení $M(t_0)$, $N(t_0)$ zavedeného při začátku spolupůsobení. Označíme-li E_nJ_n nebo E_nF_n náhradní tuhosti složeného průřezu podle teorie pružnosti, tj. $E_nJ_n = E_1F_1(i_1^2 + e_1^2) + E_2F_2(i_2^2 + e_2^2)$, $E_nF_n = E_1F_1 + E_2F_2$, plynou z rovnosti pootočení a protažení v části 1 a v celém složeném průřezu vztahy $M_1/E_1J_1 = (M + Nc)/E_nJ_n$, $N_1/E_1F_1 =$

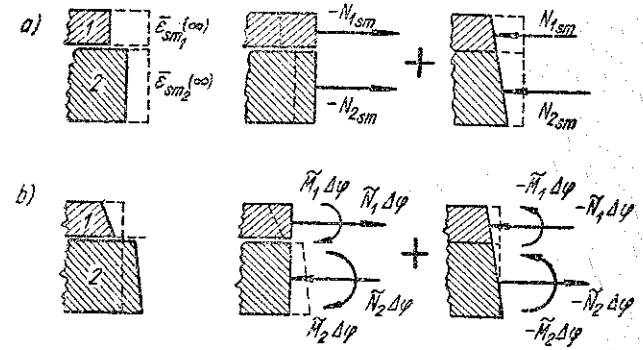
$= N/E_nF_n + e_1(M + Nc)/E_nJ_n$, z nichž lze vyjádřit počáteční hodnoty vzniklé zavedením vnějšího zatížení $M(t_0)$, $N(t_0)$ ve tvaru

$$M_1(t_0) = \frac{[M(t_0) + N(t_0)\,c]\,i_1^2}{i_1^2 + e_1^2 + \dfrac{E_2F_2}{E_1F_1}(i_2^2 + e_2^2)},$$

$$N_1(t_0) = \frac{N(t_0)}{1 + \dfrac{E_2F_2}{E_1F_1}} + \frac{e_1}{i_1^2} M_1(t_0). \tag{6.9}$$

Hodnoty $M_2(t_0)$, $N_2(t_0)$ plynou záměnou indexů 1 a 2. (Tytéž hodnoty bychom vypočetli i pomocí koeficientů (6.5), (6.7).)

Partikulární řešení lze obecně určit z koeficientů (6.6), (6.7) a (6.8) podle (4.15). Pro časově konstantní zatížení představuje M, N řešení složeného



Obr. 6.2. a) Stanovení účinků diferenciálního smrštění (za předpokladu pružnosti)
b) Řešení průřezu numerickou integrací. Znázornění postupu při stanovení účinku vnitřní deformace na pružném průřezu

transformovaného průřezu pro toto zatížení a smrštění $\varkappa_i\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ a jako takové je pak lze nejjednodušeji určit. Označme $E_n'J_n'$ nebo $E_n'F_n'$ náhradní tuhosti složeného transformovaného průřezu, tj. $E_n'J_n' = E_1'F_1(i_1^2 + e_1'^2) + E_2'F_2(i_2^2 + e_2'^2)$, $E_n'F_n' = E_1'F_1 + E_2'F_2$. Účinky smrštění $\varkappa_i\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ lze přímo stanovit (obr. 6.2a) na základě této úvahy: smrštění $\varkappa_1\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ nebo $\varkappa_2\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ se zruší napřed tahovými silami $-N_{1_{sm}}$, $-N_{2_{sm}}$, kde $N_{1_{sm}} = E_1F_1\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, $N_{2_{sm}} = E_2F_2\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ v těžišti částí průřezu, které se pak nechají působit s opačným znaménkem na transformovaný složený průřez, čímž vzniká síla $N_{sm_p}' = N_{1_{sm}}' + N_{2_{sm}}'$ a moment $M_{sm_p}' =$

$= N_{1_{sm}}e_1' + N_{2_{sm}}e_2'$. Tyto dva stavy se potom superponují. Z rovnosti pootočení a protažení v části 1 a v celém složeném transformovaném průřezu plynou vztahy

$$\frac{M_{1p}}{E_1'J_1} = \frac{M + Nc' + M_{sm_p}'}{E_n'J_n},$$

$$\frac{N_{1_p}}{E_1'F_1} = \frac{M_{1_p}e_1'}{E_1'J_1} + \frac{N + N_{sm_p}'}{E_n'F_n} - \varkappa_1\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}. \tag{6.10a}$$

Úpravou těchto vztahů dostaneme

$$M_{1_p} = \frac{M + Nc' + \dfrac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}(e_1'E_1F_1 + e_2'E_2F_2)}{i_1^2 + e_1'^2 + \dfrac{E_2'F_2}{E_1'F_1}(i_2^2 + e_2'^2)}\,i_1^2, \tag{6.10}$$

$$N_{1_p} = M_{1_p}\frac{e_1'}{i_1^2} + \frac{N + \dfrac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\left(1 - \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)E_2F_2}{1 + \dfrac{E_2'F_2}{E_1'F_1}}.$$

Výrazy pro M_{2_p}, N_{2_p} plynou záměnou indexů 1 a 2. Lze se přesvědčit, že výrazy pro M_{1_p}, N_{1_p}, M_{2_p}, N_{2_p} splňují podmínky rovnováhy (6.3) průřezu (odkud je možno též vypočíst M_{2_p}, N_{2_p}). Výrazy (6.10) jsou totožné s hodnotami, jež plynou z koeficientů (6.6), (6.7), (6.8).

Obecné řešení průřezu složeného z částí je poměrně pracné, zvláště má-li více než dvě části. Je proto v praxi často vhodné použít některého přibližného řešení podle kap. 5, např. numerickou integraci.

Pro jednoduchost se často užívá řešení ideálními přetvárnými moduly, popsané v odst. 5.12. Účinky stálého zatížení, počátečního předpětí a smrštění se podle něj přibližně počítají na tzv. ideálním průřezu o modulech $E_{id} = E/(1 + \varkappa\bar{\varphi})$ jako v teorii pružnosti — viz např. [33], [54].

Pro přesnost v rámci výchozích předpokladů kap. 2 však toto řešení není příliš vhodné, neboť relaxační numerická integrace podle odst. 5.12 dává přesnější hodnoty, přičemž není o mnoho složitější. (Pro ztráty předpětí je v podstatě stejné řešení již užíváno [40], [54].)

(a) Napřed se určí deformace včetně smrštění, jaké by vznikly v jednotlivých částech, kdyby byly odděleny a působily v nich konstantní vnitřní síly rovné počátečním silám M_{1_0}, N_{2_0} (obr. 6.2b). Tyto deformace se pak odstraní

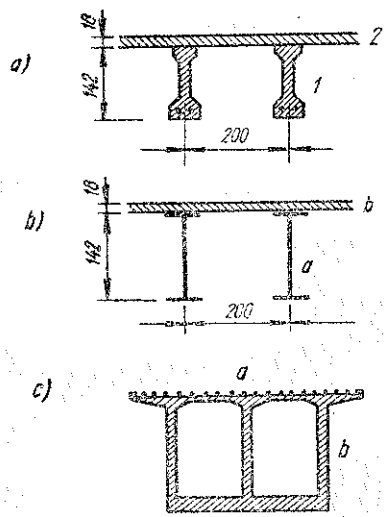
silami $\tilde{M}_1\Delta\varphi$, $\tilde{N}_1\Delta\varphi$, $\tilde{M}_2\Delta\varphi$, $\tilde{N}_2\Delta\varphi$, vypočtenými za předpokladu modulů pružnosti $\bar{E}_i = E_i/(1 + \frac{1}{2}\varkappa_i\Delta\varphi)$. Platí

$$\tilde{M}_i = -\frac{M_{i_0}\varkappa_i\Delta\varphi}{1 + \frac{1}{2}\varkappa_i\Delta\varphi},$$

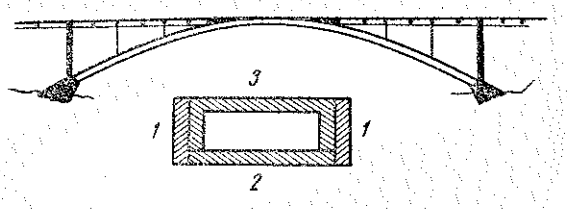
$$\tilde{N}_i = -\frac{[N_i + E_iF_i\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)]\,\varkappa_i\Delta\varphi}{1 + \frac{1}{2}\varkappa_i\Delta\varphi}. \qquad (6.11)$$

(b) Složený průřez s moduly $\bar{E}_i$ se pak zatíží silami $-\tilde{M}_1$, $-\tilde{N}_1$, $-\tilde{M}_2$, $-\tilde{N}_2$, tj. podle (6.3) normálnou silou $N = -\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2$ a momentem $M = -\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2 - \tilde{N}_1\bar{e}_1 - \tilde{N}_2\bar{e}_2$, kde $\bar{e}_i$ jsou excentricity částí od těžiště průřezu s moduly $\bar{E}_i$, a řešením složeného průřezu s moduly $\bar{E}_i$ se vypočtou podle (6.9) odpovídající hodnoty $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{N}_2$. Dále se určí hodnoty $\Delta\overline{M}_1$, $\Delta\overline{N}_1$, ... vyvolané na průřezu s moduly $\bar{E}_i$ případnou změnou zatížení v dílku $\Delta\varphi$, jež však musí být v $\Delta\varphi$ pokud možno proměnné lineárně ve φ.

(c) Změny vnitřních sil ΔM_1, ... v dílku $\Delta\varphi$ jsou pak dány hodnotami



Obr. 6.3.



Obr. 6.4. Postup betonáže průřezu oblouku s nosnou svařenou výztuží (most přes Vltavu ve Zbraslavi)

$(\tilde{M}_1 + \overline{M}_1)\,\Delta\varphi + \Delta M_1$, $(\tilde{N}_1 + \overline{N}_1)\,\Delta\varphi + \Delta N_1$, ... Pro obvyklé hodnoty $\bar{\varphi}(\infty)$ stačí většinou volit 1 až 3 dílky $\Delta\varphi$. Nemá-li průřez žádné počáteční předpětí, tj. veškeré zatížení bylo zavedeno až na složeném průřezu a neuvažuje se smršťování, nelze řešení obdržet prostě zatížením složeného průřezu s moduly $\bar{E}_i$; je to jediný případ, kdy má smyslu užít řešení ideálními moduly, ovšem s menší přesností vzhledem k předpokladům kap. 2.

U praktických průřezů většinou bývá $E_1J_1 \ll E_2J_2$ (např. u nosníků s horní deskou, obr. 6.3a, b, nikoliv však na obr. 6.4). Potom lze pro spolupůsobení přibližně předpokládat $M_1 \doteq 0$ a zůstává jediná staticky neurčitá $N_1(t)$. Řešení lze určit podle vzorce pro 1krát staticky neurčitý systém ve tvaru

$$N_1(t) \doteq N_{1_p}(t) + [N_{1_0} - N_{1_p}(t_0)]\,e^{\lambda\bar{\varphi}},$$
$$N_2(t) = N_{2_p}(t) + [N_{2_0} - N_{2_p}(t_0)]\,e^{\lambda\bar{\varphi}},$$
$$M_2(t) = M_{2_p}(t) + [M_{2_0} - M_{2_p}(t_0)]\,e^{\lambda\bar{\varphi}},$$

kde

$$\lambda \doteq -\frac{\delta'_{1_{NN}}}{\delta_{1_{NN}}} = -\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\left(1 + \dfrac{e^2}{i_2^2}\right)}{1 + \dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\left(1 + \dfrac{e^2}{i_2^2}\right)} \qquad (6.10a)$$

je podle (6.3) pro všechny veličiny stejné. Pro $M_1(t)$ je však vhodnější dosadit $\lambda \doteq -\delta'_{1_{MM}}/\delta_{1_{MM}} \doteq -\varkappa_1$. Ostatní koeficienty $\delta'_{2_{NN}}$, $\delta_{2_{NN}}$, ... zde nemají smyslu, neboť není možno volit 2 staticky neurčité. Řešení podle (6.10a) je nejpřesnější a nejvhodnější pro většinu prakticky užívaných průřezů.

Je-li zatížení lineárně proměnné ve φ ve tvaru $M(t) = {}^1M + {}^2M\bar{\varphi}(t)$, $N(t) = {}^1N + {}^2N\bar{\varphi}(t)$, je možno vyjádřit partikulární řešení podle obecných rovnic (4.17.2—3). Z významu rovnic (4.17.1—2) dále plyne, že ${}^2M_1$, ${}^2N_1$ je dáno též rovnicemi (6.10) pro $M = {}^2M$, $N = {}^2N$, $\varepsilon_{sm}(\infty) = 0$. Vzhledem k rovnicím (4.17.3) pak lze ${}^1M_1$, ${}^1N_1$ vypočíst jako součet hodnoty ${}^aM_1$, ${}^aN_1$, jež se vypočte z rovnice (6.10) pro $M = {}^1M$, $N = {}^1N$, a hodnoty ${}^bM_1$, ${}^bN_1$, jež se určí řešením soustavy dvou rovnic

$$\delta'_{1_{NN}}{}^bN_1 + \delta'_{1_{MN}}{}^bM_1 + (\delta_{1_{NN}}{}^2N_1 + \delta_{1_{MN}}{}^2M_1 + {}^2\delta_{1_N}) = 0, \ \ldots,$$

kde ${}^2\delta_{1_M}$, ${}^2\delta_{1_N}$ se vypočtou z rov. (6.7) pro $M = {}^2M$, $N = {}^2N$ (${}^1M_1 = {}^aM_1 + {}^bM_1$, ${}^2N_1 = {}^aN_1 + {}^bN_1$). Pro $E_1J_1 \ll E_2J_2$ se postup značně zjednoduší.

Příklad 6.1.1. *Spřažený průřez beton—beton.* Uvažujme průřez uprostřed rozpětí prostého mostního nosníku (roštu), vytvořeného spřažením předpjatých prefabrikátů (F_1), s deskou (F_2), dodatečně na nich vybetonovanou (obr. 6.3a). (Rozpětí je asi 35 m.) Prefabrikáty mají průřezové hodnoty $F_2 = 0{,}552\ \mathrm{m}^2$, $J_2 = 0{,}143\ \mathrm{m}^4$, $i_2^2 = 0{,}259\ \mathrm{m}^2$, $E_2 = 3{,}85 \cdot 10^6\ \mathrm{Mp/m}^2$ (beton 500), deska při vzdálenosti nosníků 2,00 m $F_1 = 0{,}360\ \mathrm{m}^2$, $J_1 = 0{,}00101\ \mathrm{m}^4$,

$i_1^2 = 0{,}00281\ \mathrm{m}^2$, $e = 0{,}86$ m, $E_1 = 2{,}85 \cdot 10^6\ \mathrm{Mp/m}^2$ (beton 250). Předpětí průřezu pokládejme přibližně za konstantní, $N_{s_0} = -450$ Mp, $a_1 = -1{,}39$ m, $a_2 = -0{,}53$ m. (Přesnější bylo by zavést je jako proměnné hodnotami vypočtenými bez ohledu na rozdílné stáří betonu podle př. 6.3.1.) Prefabrikáty jsou v době začátku spolupůsobení staré $t_{0_2} = 4$ měsíce a betonová deska $t_{0_1} = 14$ dní. Moment od váhy prefabrikátů je $M_{g_1} = 106$ Mp m a od váhy desky a vozovky $M_{g_2} = 124$ Mp m, $M = M_{g_1} + M_{g_2} = 230$ Mp m.

Zvolíme $t_0 = 2$ měsíce; tomu odpovídá $\varkappa_1 = 1{,}37$, $\varkappa_2 = 0{,}80$; $\overline{\varphi}(\infty) = 4(1 - 0{,}579) = 1{,}68$, $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) = -\frac{3}{4}\,10^{-4}$. Při řešení budeme předpokládat plné spolupůsobení horní desky, k čemuž je nutné, aby v ní nevznikl tah. Počáteční hodnoty v době začátku spolupůsobení jsou $M_{1_0} = N_{1_0} = 0$, $M_{2_0} = 230 - 450 \cdot 0{,}53 = -8$ Mp m, $N_{2_0} = -450$ Mp. (Počáteční krajní napětí jsou $\sigma_{1_h}(t_0) = \sigma_{1_d}(t_0) = 0$, $\sigma_{2_h}(t_0) = -772\ \mathrm{Mp/m}^2$, $\sigma_{2_d}(t_0) = -858\ \mathrm{Mp/m}^2$.)

Dále vypočteme $e_2' = eE_1'F_1/(E_1'F_1 + E_2'F_2) = 0{,}189$ m, $e_1' = 0{,}189 - 0{,}860 = 0{,}671$ m, $c' = 0{,}189 + 0{,}530 = 0{,}719$ m.

Partikulární řešení je

$M_{1_p} = [230 - 450 \cdot 0{,}719 - \frac{3}{4}\,10^{-4}(-0{,}671 \cdot 1{,}03 + 0{,}189 \cdot 2{,}13)\,10^6]/[0{,}0028 + 0{,}450 + (0{,}259 + 0{,}036)\,2{,}66/0{,}749] = -0{,}137$ Mp m,

$N_{1_p} = (-0{,}671)\,(-0{,}137)/0{,}00281 + [-450 - \frac{3}{4}\,10^{-4}(1 - 1{,}37/0{,}80)\,2{,}13 \cdot 10^6]/(1 + 2{,}66/0{,}749) = -41{,}1$ Mp. (Pro kontrolu můžeme též vypočíst $N_{2_p} = -408$ Mp, $M_{2_p} = -44{,}4$ Mp m a porovnat pak splnění rovnic rovnováhy.)

Poněvadž $J_1 \ll J_2$ je možno určit řešení přibližně jako s jedinou staticky neurčitou N_1. Vypočte se

$\lambda = -[1{,}37 + 0{,}80(1 + 0{,}86^2/0{,}259)\,1{,}03/2{,}13)]/[1 + (1 + 0{,}86^2/0{,}259)\,1{,}03/2{,}13] = -1{,}00$; $\lambda\overline{\varphi}(\infty) = -1{,}68$.

Výsledek je $N_{1_\infty} \doteq -41{,}1(1 - \mathrm{e}^{-1{,}68}) = -33{,}4$ Mp, $M_{1_\infty} \doteq -0{,}137(1 - \mathrm{e}^{-1{,}37 \cdot 1{,}68}) = -0{,}122$ Mp m.

Pro předpjatý nosník plyne z rovnic rovnováhy

$N_{2_\infty} = -450 - (-33{,}4) = -417$ Mp, $M_{2_\infty} = 230 - (-0{,}12) - (-33{,}5)\,(-1{,}39) - (-417)\,(-0{,}53) = -39$ Mp m.

Krajní napětí v betonové desce jsou

$$\sigma_{1_h}(\infty) = -33{,}4/0{,}360 + 0{,}12 \cdot 0{,}09/0{,}00101 = -82{,}3\ \mathrm{Mp/m}^2,$$
$$\sigma_{1_d}(\infty) = -33{,}4/0{,}360 - 0{,}12 \cdot 0{,}09/0{,}00101 = -103{,}5\ \mathrm{Mp/m}^2$$

a v předpjatém nosníku

$\sigma_{2_h}(\infty) = -417/0{,}552 + 39 \cdot 0{,}77/0{,}143 = -546\ \mathrm{Mp/m}^2$, $\sigma_{2_d}(\infty) = -417/0{,}552 - 39 \cdot 0{,}77/0{,}143 = -933\ \mathrm{Mp/m}^2$. (Vidíme, že betonová horní deska je dotvarováním a smršťováním stlačována.) Změna napětí je v předpjatém nosníku $\Delta\sigma_h = 226\ \mathrm{Mp/m}^2$, tj. 30 %, $\Delta\sigma_d = -75\ \mathrm{Mp/m}^2$, tj. −8 %.

Poznámka. Při přesném řešení bychom získali výsledek $M_{1_\infty} = -0{,}131$ Mp m, $N_{1_\infty} = -33{,}5$ Mp, $M_{2_\infty} = -39$ Mp m, $N_{2_\infty} = -417$ Mp, takže přibližný vzorec dává prakticky přesné hodnoty. Přibližným řešením interpolační integrací bychom při jednom dílku $\Delta\varphi = \overline{\varphi}(\infty)$ dostali $M_{1_\infty} = -0{,}160$ Mp m, $N_{1_\infty} = -38{,}7$ Mp, $M_{2_\infty} = -42$ Mp m, $N_{2_\infty} = -411$ Mp, při přibližném řešení ideální moduly $-0{,}102$ Mp m, $-25{,}9$ Mp, -31 Mp m, -424 Mp. Vidíme, že řešení ideálními moduly je méně přesné než interpolační integrací a přitom stejně pracné.

Příklad 6.1.2. *Průřez složený ze tří částí.* Řešme nyní průřez z předcházejícího příkladu (obr. 6.3a) za předpokladu, že ocelové předpínací kabely (F_a) spolupůsobí. Nechť je $F_a = 0{,}00535\ \mathrm{m}^2$, $J_a = 0{,}00004\ \mathrm{m}^4 \doteq 0$, $E_a = 20 \cdot 10^6\ \mathrm{Mp/m}^2$. Počáteční hodnota předpětí je $N_{a_0} = 480$ Mp, moment od celého stálého zatížení je $M = 247$ Mp m. Ostatní výchozí hodnoty jsou stejné. Platí $M_{1_0} = N_{1_0} = 0$, $M_{2_0} = 247 - 480 \cdot 0{,}53 = -8$ Mp m, $N_{2_0} = -480$ Mp.

K řešení lze též užít přibližného vzorce; zde však použijme interpolační integraci. Zvolíme pouze jeden dílek $\Delta\varphi = \overline{\varphi}(\infty)$. Vypočte se: $\varkappa_1\overline{\varphi}/(1 + \frac{1}{2}\varkappa_1\overline{\varphi}) = 1{,}070$, $\varkappa_2\overline{\varphi}/(1 + \frac{1}{2}\varkappa_2\overline{\varphi}) = 0{,}805$, $\overline{E}_1F_1 = 0{,}479 \cdot 10^6$ Mp, $\overline{E}_2F_2 = 1{,}275 \cdot 10^6$ Mp, $E_aF_a = 0{,}1070 \cdot 10^6$ Mp. Dále se určí těžiště průřezu s moduly $\overline{E}$, $e_1 = -(1{,}275 \cdot 0{,}86 + 0{,}107 \cdot 1{,}39)/(0{,}479 + 1{,}275 + 0{,}107) = -0{,}669$ m, $e_2 = 0{,}191$ m, $e_a = 0{,}721$ m.

Z počátečních hodnot plyne $\tilde{N}_1 = -(0 - 1{,}03 \cdot 10^6 \cdot 0{,}75 \cdot 10^{-4})\,1{,}070 = 82{,}6$ Mp. $\tilde{N}_2 = -(-480 - 2{,}13 \cdot 10^6 \cdot 0{,}75 \cdot 10^{-4})\,0{,}805 = 521$ Mp, $\tilde{M}_2 = -(-8 \cdot 0{,}805) = 6{,}5$ Mp m, $\tilde{M}_a = \tilde{N}_a = \tilde{M}_1 = 0$.

Zatížením složeného průřezu s moduly $\overline{E}$ dostaneme $\overline{M}_1 = [0 - 6{,}45 - 82{,}6(-0{,}669) - 521 \cdot 0{,}191]\,0{,}479 \cdot 0{,}00281/[0{,}479(0{,}00281 + 0{,}669^2) + 1{,}275(0{,}259 + 0{,}191^2)] = (-50{,}7/0{,}651)\,0{,}479 \cdot 0{,}00281 = -0{,}1050$ Mp m, $\overline{M}_2 = (-50{,}7/0{,}651)\,1{,}275 \cdot 0{,}259 = -25{,}7$ Mp m, $\overline{M}_a = 0$, $\overline{N}_1 = (-82{,}6 - 521)\,0{,}479/(0{,}107 + 1{,}754) + (-0{,}669/0{,}00281) \cdot (-0{,}1050) = -130{,}5$ Mp, $\overline{N}_2 = \ldots = -418$ Mp, $\overline{N}_a = \ldots = -55$ Mp.

Odtud plyne výsledek $M_{1_\infty} = -0{,}105$ Mp m, $M_{2_\infty} = -8 + 6{,}5 - 25{,}7 = -27{,}2$ Mp m, $M_{a_\infty} \doteq 0$, $N_{1_\infty} = 82{,}6 - 130{,}5 = 47{,}9$ Mp, $N_{2_\infty} = -480 + 521 - 418 = -377$ Mp, $N_{a_\infty} = 480 - 55 = 425$ Mp. Nakonec zkontrolujeme ještě splnění podmínek rovnováhy.

6.2. Spřažený ocelobetonový průřez

Jako speciální případ složeného průřezu uvažujme spřažený ocelobetonový průřez. Nechť část 1 je tvořena betonem a část 2 ocelí (obr. 6.1b). Dále pišme ve shodě s obvyklým označením místo 1 index b (beton) a místo 2 index a (ocel). Předpokládejme, že $i_b > 0$, $i_a > 0$. Pro ocel platí $\varkappa_a = 0$, pro beton položíme $\varkappa_b = 1$. Ze statických vztahů plyne $e_1' = -e$, $e_2' = 0$, $c' = -e_2$. Neutrálná osa transformovaného průřezu prochází těžištěm ocelové části.

Řešení spřaženého průřezu lze získat dosazením do obecných vzorců jako speciální případ. Z výrazů (6.5) až (6.8) obdržíme

$$\delta_{b_{MM}} = \frac{1}{E_a J_a} + \frac{1}{E_b J_b}, \quad \delta_{b_{MN}} = -\frac{e}{E_a J_a},$$

$$\delta_{b_{NN}} = \frac{1}{E_a F_a} + \frac{e^2}{E_a J_a} + \frac{1}{E_b F_b}, \tag{6.12}$$

$$\delta'_{b_{MM}} = \frac{1}{E_b J_b}, \quad \delta'_{b_{MN}} = 0, \quad \delta'_{b_{NN}} = \frac{1}{E_b F_b},$$

$$\delta'_{b_M}(t) = \delta'_{b_N}(t) = \delta'_{sm_{bM}} = 0, \quad \delta'_{sm_{bN}} = \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

Partikulární řešení dostaneme jako limitu výrazů (6.10), (6.11) pro $\varkappa_2 \to 0$ $(e_2' \to 0,\ e_1' \to -e,\ e' \to c_2)$:

$$M_{b_p} = 0, \quad N_{b_p} = -E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \tag{6.13}$$

$$M_{a_p} = M - Nc_a - E_b F_b e \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \quad N_{a_p} = N + E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

Při partikulárním řešení přenáší veškeré vnější zatížení ocelová část průřezu.

Poznámka. Pro přímý výpočet $M_a(t)$, $N_a(t)$ platí

$$\delta_{a_{MM}} = \delta_{b_{MM}}, \quad \delta_{a_{MN}} = 0; \quad \delta_{a_{NN}} = \frac{1}{E_a F_a} + \frac{e^2}{E_b J_b} + \frac{1}{E_b F_b}, \tag{6.12a}$$

$$\delta'_{a_{MM}} = \frac{1}{E_b J_b}, \quad \delta'_{a_{MN}} = 0, \quad \delta'_{a_{NN}} = \frac{1}{E_b F_b} + \frac{e^2}{E_b J_b}.$$

U nosníků užívaných v praxi (hlavně při větších rozpětích) většinou bývá $E_b J_b \ll E_a J_a$ (u sloupů nikoliv). Při volbě M_b, N_b za staticky neurčité

pak přibližně lze M_b zanedbat a průřez počítat jako jedenkrát staticky neurčitý, se staticky neurčitou N_b. Platí přibližně

$$N_b(t) \doteq N_{b_p}(t) + [N_{b_0} - N_{b_p}(t_0)]\, e^{\lambda \overline{\varphi}(t)}$$

a obdobně pro $M_a(t)$, $N_a(t)$, přičemž

$$\lambda = -\frac{\delta'_{b_{NN}}}{\delta_{b_{NN}}} = -\frac{1}{1 + \dfrac{E_b F_b}{E_a F_a}\left(1 + \dfrac{e^2}{i_a^2}\right)}. \tag{6.12b}$$

Pro $M_b(t)$ je vhodnější dosadit $\lambda = -\delta'_{b_{MM}}/\delta_{b_{MM}} \doteq -1$.

Příklad 6.2.1. *Spřažený ocelobetonový průřez.* Uvažujme průřez uprostřed rozpětí prostého mostního nosníku (roštu) vytvořeného spřažením ocelových plnostěnných nosníků (F_a) rozpětí asi 60,0 m s betonovou deskou (F_b) (obr. 6.3b). Průřezové hodnoty nosníků jsou $F_a = 460$ cm², $J_a = 1{,}88 \cdot 10^6$ cm⁴, $i_a^2 = 4090$ cm², $E_a = 21{,}0 \cdot 10^5$ kp/cm². Pro desku je (při vzdálenosti nosníků 200 cm) $F_b = 3600$ cm², $J_b = 9{,}70 \cdot 10^4$ cm⁴, $i_b^2 = 27$ cm², $E_b = 2{,}85 \cdot 10^5$ kp/cm² (beton 250), $e = 129$ cm, $e_b = 129/(1 + 1{,}060) = -62{,}5$ cm, $e_a = 66{,}5$ cm. Most se staví tak, že ocelové nosníky se smontují na prozatímních bárkách podpírajících nosník přibližně uprostřed rozpětí a na nich se vybetonuje horní deska. V tomto stadiu nechť vzniká uprostřed rozpětí záporný moment $-3{,}00 \cdot 10^5$ kp cm, způsobující předpětí ocelového nosníku. Dotvarování se v tomto stadiu neuplatňuje, neboť v desce vznikají tahové trhlinky. V době 3 měsíce od vybetonování desky se nosník spustí z bárek na definitivní podpory na koncích nosníku a v době 6 měsíců od vybetonování desky se pak klade vozovka se vším dalším stálým zatížením. Nechť vlastní váha ocelových nosníků a horní desky vyvozuje uprostřed rozpětí moment $M_{g_1} = 350 \cdot 10^5$ kp cm a nechť další stálé zatížení vyvozuje uprostřed rozpětí moment $M_{g_2} = 75 \cdot 10^5$ kp cm.

Za staticky neurčité zvolíme $M_a(t)$, $N_a(t)$. Protože zatížení g_1, g_2 jsou zavedena v různých časech, počítáme vliv každého zatížení zvlášť a výsledek určíme podle principu superpozice. Pro g_1 ($t_{0_1} = 3$ měsíce) se určí $\overline{\varphi}_{g_1}(\infty) = 1{,}49$, pro g_2 ($t_{0_2} = 6$ měsíců) je $\overline{\varphi}_{g_2}(\infty) = 1{,}15$.

Počáteční hodnoty podle (6.9) jsou pro g_1, $M_{a_0}^{g_1} = [-300 + (300 + 350) \cdot 0{,}323] \cdot 10^5 = -90{,}0 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a_0}^{g_1} = -N_{b_0}^{g_1} = -10^5(300 + 350)\, 0{,}323 \cdot 66{,}5/4090 = 3{,}41 \cdot 10^5$ kp, $M_{b_0}^{g_1} = 1{,}47 \cdot 10^5$ kp cm; pro g_2 je $M_{a_0}^{g_2} = 75 \cdot 0{,}323 \cdot 10^5 = 24{,}2 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a_0}^{g_2} = -N_{b_0}^{g_2} = 10^5 \cdot 24{,}2 \cdot 66{,}5/4090 = 0{,}393 \cdot 10^5$ kp, $M_{b_0}^{g_2} = 0{,}393 \cdot 27/62{,}5 = 0{,}16$ kp cm.

Partikulární hodnoty podle (6.13) jsou $M_{a_p}^{g_1} = 350 \cdot 10^5 - (-3 \cdot 10^{-4}/4) \cdot 2{,}85 \cdot 10^5 \cdot 3600 \cdot 129^2 = 449 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a_p}^{g_1} = -N_{b_p}^{g_1} = (-3 \cdot 10^{-4}/4) \cdot 2{,}85 \cdot 10^5 \cdot 3600 = -0{,}769 \cdot 10^5$ kp, $M_{b_p}^{g_1} = 0$; $M_{a_p}^{g_2} = 75 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a_p}^{g_2} = M_{b_p}^{g_2} = N_{b_p}^{g_2} = 0$.

Podle (6.12b) určíme $\lambda = -1/[1 + 1{,}062(1 + 129^2/4090)] = -0{,}1566$; $\lambda\overline{\varphi}_{g_1}(\infty) = -0{,}233$, $\lambda\overline{\varphi}_{g_2}(\infty) = -0{,}180$. Poněvadž $E_bJ_b \ll E_aJ_a$, lze psát výsledek $M_{a\infty} \doteq [449 + (-90 - 449)\,e^{-0{,}233}]\,10^5 + [75 + (24{,}2 - 75)\,e^{-0{,}180}]\,10^5 = 54{,}6 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a\infty} = -N_{b\infty} \doteq [-0{,}769 + (3{,}41 + 0{,}769)\,e^{-0{,}233}]\,10^5 + 0{,}459 \cdot e^{-0{,}180} \cdot 10^5 = 2{,}87 \cdot 10^5$ kp, $M_{b\infty} \doteq (1{,}47 \cdot e^{-1{,}49} + 0{,}16 \cdot e^{-1{,}15})\,10^5 = 0{,}38 \cdot 10^5$ kp cm. Pro kontrolu dosadíme do rovnic rovnováhy (6.3).

6.3. Průřez prutu z předpjatého betonu

Uvažujme napřed průřez z předpjatého betonu se spolupůsobícími kabely (zainjektovanými), které mají výrazně různé excentricity. Účinek betonářské výztuže lze přibližně zanedbat. Řešení je totožné s předcházejícím případem, neboť souhrn kabelů je homogenní a lze jej považovat za jednu ze dvou homogenních částí průřezu. Odlišnost řešení je pouze v počátečních podmínkách.

Byly-li některé kabely předpjaty až po zavedení zatížení, rovnají se odpovídající počáteční hodnoty zavedeným silám kabelů, zmenšeným o počáteční a krátkodobé ztráty. Transformovaný průřez se řeší bez předpětí, pouze pod vnějším zatížením a smrštěním $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Počáteční hodnoty od zatížení, které přistoupilo až po zavedení předpětí, se vypočtou opět podle vzorců (6.9). Ztráty předpětí dotvarováním a smršťováním jsou dány rozdílem počátečních a konečných hodnot $M_a(t)$, $N_a(t)$. (Pro výpočet napětí betonových částí lze též počítat přímo $M_b(t)$, $N_b(t)$.)

Přesné řešení je jednoduché u průřezu, kde těžiště částí jsou totožná, což se většinou vyskytuje u sloupů, pilířů apod. (centricky předpjatý sloup, železobetonový sloup souměrně vyztužený, popř. s vloženým ocelovým nosníkem). Platí zde $e = e_a = e_b = \delta_{b_{MN}} = 0$ a soustava dvou rovnic se rozpadne na dvě samostatné rovnice. Při $M = \text{konst}$, $N = \text{konst}$ se obdrží

$$\begin{aligned} M_b(t) &= M_{b_0}\,e^{\lambda M\overline{\varphi}(t)}, \\ N_b(t) &= N_{b_0}\,e^{\lambda\overline{\varphi}(t)} - (1 - e^{\lambda\overline{\varphi}(t)})\,E_bF_b\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty), \\ M_a(t) &= M_{a_0} + (M - Na_a - M_{a_0})\,(1 - e^{\lambda_M\overline{\varphi}(t)}), \\ N_a(t) &= N_{a_0} + (N + E_bF_b\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) - N_{a_0})(1 - e^{\lambda\overline{\varphi}(t)}), \end{aligned} \tag{6.14}$$

kde

$$\lambda_M = -\frac{1}{1 + \dfrac{E_bJ_b}{E_aJ_a}}, \quad \lambda = -\frac{1}{1 + \dfrac{E_bF_b}{E_aF_a}}. \tag{6.14a}$$

Uvažujme nyní průřez nosníku s kabely o přibližně stejné excentricitě. Obvykle lze totiž přibližně uvažovat, že centrální moment setrvačnosti kabelů $J_a \doteq 0$, $F_a > 0$, tj. že souhrn kabelů nepřenáší momenty a všechny kabely mají tudíž stejné napětí (obr. 6.1c). Zanedbáme takto různé excentricity kabelů, které si myslíme soustředěny v jejich těžišti (a též betonářskou výztuž).

Poněvadž $M_a(t) = 0$, zůstávají jen tři neznámé $M_b(t)$, $N_b(t)$, $N_a(t)$, vázané dvěma podmínkami rovnováhy (6.3). Průřez je tedy jedenkrát vnitřně staticky neurčitý a řešení musí vést jen na jednu diferenciální rovnici o jedné neznámé. Proto všechny koeficienty vyjma $\delta_{a_{NN}}$ a $\delta'_{a_{NN}}$ nemají smyslu, neboť byly odvozeny pro nezávislé rovnovážné stavy základní soustavy, při nichž je $M_a \neq 0$. Koeficienty $\delta_{a_{NN}}$, $\delta'_{a_{NN}}$ a δ'_{a_N} platí i pro tento případ. Pro $N_a(t)$ máme jedinou diferenciální rovnici

$$\delta_{a_{NN}}\frac{\mathrm{d}N_a(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{a_{NN}}N_a(t) + \delta'_{a_N}(t) + \frac{\mathrm{d}\delta_{a_N}(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm\,a_N} = 0. \tag{6.15}$$

Dosazením do (6.5) a (6.6) dostaneme

$$\delta_{a_{NN}} = \frac{1}{E_bF_b} + \frac{e^2}{E_bJ_b} + \frac{1}{E_aF_a}, \quad \delta'_{a_{NN}} = \frac{e^2}{E_bJ_b} + \frac{1}{E_bF_b},$$

což lze samozřejmě získat i přímým výpočtem. Odtud lze vypočíst

$$\lambda = -\frac{\delta'_{a_{NN}}}{\delta_{a_{NN}}} = -\frac{1}{1 + \dfrac{E_bF_b}{E_aF_a}\Big/\left(1 + \dfrac{e^2}{i_b^2}\right)}. \tag{6.16}$$

Stejné λ platí též pro průběh $M_b(t)$, $N_b(t)$ a ostatních statických veličin průřezu.

Partikulární řešení při konstantním zatížení lze obdržet opět buď přímým výpočtem jako $-\delta'_{a_N}/\delta'_{a_{NN}}$ nebo řešením pružného složeného transformovaného průřezu pro zatížení M, N a smrštění betonové části $\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ anebo též dosazením do obecných vzorců (6.10), a určením jejich limity pro $\varkappa_a \to 0$. Přitom je nutno dosadit $e'_a \to 0$, $e'_b \to -e$, $c' \to -e_a$ ($\varkappa_b = 1$, $F_a > 0$, $\varepsilon_{sm} < 0$). Dostaneme tak ($M_{a_p} = 0$)

$$M_{b_p} = \frac{M - Nc_a - E_bF_be\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)}{1 + e^2/i_b^2},$$

$$N_{b_p} = -\frac{(M - Nc_a)\, e + E_b J_b \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)}{i_b^2 + e^2}, \qquad (6.17)$$

$$N_{a_p} = N + \frac{(M - Nc_a)\, e + E_b J_b \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)}{i_b^2 + e^2}.$$

Počáteční hodnoty od počátečního předpětí N_{a_0} a dalšího zatížení M_1, N_1, zavedeného v čase t_0 až po předepnutí ($N_{b_0} = N_0 - N_{a_0}$, $M_{b_0} = M_0 - e_b N_{b_0} - e_a N_{a_0}$), podle (6.9) jsou $N_{a_0} + N_{a_1}$, $N_{b_0} + N_{b_1}$, $M_{b_0} + M_{b_1}$, kde ($M(t_0) = M_0 + M_1$, $N(t_0) = N_0 + N_1$):

$$M_{b_1} = \frac{(M_1 + N_1 c)\, i_b^2}{i_b^2 + e_b^2 + \dfrac{E_a F_a}{E_b F_b} e_a^2}, \quad N_{b_1} = \frac{N_1}{1 + \dfrac{E_a F_a}{E_b F_b}} + \frac{e_b^2}{i_b^2} M_b(t_0), \qquad (6.18)$$

$$N_{a_1} = \frac{N_1}{1 + \dfrac{E_b F_b}{E_a F_a}} + \frac{(M_1 + N_1 c)\, e_a}{\dfrac{E_b F_b}{E_a F_a}(i_b^2 + e_b^2) + e_a^2}.$$

Hodnoty $M_b(t)$, $N_b(t)$, $N_a(t)$ mají průběh

$$M_b(t) = M_{b_p}(t) + [M_{b_0} - M_{b_p}(t_0)]\, e^{\lambda \overline{\varphi}(t)} \qquad (6.19)$$

a obdobně pro $N_b(t)$, $N_a(t)$. Průběh stejného tvaru mají také napětí, jež lze eventuálně počítat přímo: $\sigma(t) = \sigma_p(t) + [\sigma_0 - \sigma_p(t_0)]\, e^{\lambda \overline{\varphi}(t)}$. Z průběhu tahové síly kabelů $N_a(t)$ lze také určit ztráty předpínací síly od dotvarování a smršťování, jež se při stálém zatížení rovnají

$$N_a(t) - N_{a_0} = (N_{a_p} - N_{a_0})\,(1 - e^{\lambda \overline{\varphi}(t)}). \qquad (6.20)$$

Výrazy (6.20) a (6.17) pro speciální případ $N = 0$ jsou ve shodě s výrazy, které odvodili již Busemann a Birkenmayer [14], [12]. Výraz (6.16) i ztráty předpětí podle (6.20) lze též vyjádřit pomocí počátečních napětí kabelů a betonu v místě kabelu ([54], str. 165).

Poznámka. Při návrhu plochy kabelů může být někdy výhodnější vycházet z hodnot $N_a(\infty)$ pro $t \to \infty$, které vypočteme jako hodnoty předpětí potřebné k vydimenzování průřezu, zmenšené o přírůstek od nahodilého zatížení (viz odst. 4.6). Při zvolené ploše kabelů lze pak z hodnot $N_a(\infty)$ jako okrajových podmínek vypočíst zpětně potřebné počáteční hodnoty pro $t = t_0$:

$$N_a(t) = N_{a_p} + [N_a(\infty) - N_{a_p}]\, e^{-\lambda[\varphi(\infty) - \varphi(t)]}, \qquad (6.20a)$$

na něž musí být průřez po proběhnutí počátečních a krátkodobých ztrát předepjat. Přičtením počátečních a krátkodobých ztrát zjistíme počáteční napětí kabelů. Nevyhovují-li, změníme plochu kabelů a výpočet opakujeme.

Ztráty předpětí lze určit i různými přibližnými metodami. Nejjednodušší vzorec dává numerická integrace polygonální, podle níž ztráta napětí kabelu $\Delta\sigma_a(t)$ od času t_0 do t je přibližně

$$\Delta\sigma_a(t) = \overline{\varphi}(t) \frac{E_a}{E_b} \sigma_{b_0}^a + \overline{\varepsilon}_{sm}(t)\, E_a, \qquad (6.20b)$$

kde $\sigma_{b_0}^a$ je počáteční napětí betonu v místě kabelu. Vzorec plyne přímo z výminky stejných protažení kabelu a betonu v místě kabelu za předpokladu, že napětí betonu je konstantní a rovné počátečnímu, tj. $\Delta\sigma_a/E_a = \sigma_{b_0}^a \overline{\varphi}/E_b + \overline{\varepsilon}_{sm}$.

Obdobný vzorec pro ztráty dotvarováním experimentálně zjištěný,

$$\Delta\sigma_a(t) = \overline{\varphi}(t) \frac{E_a}{E_b} \sigma_{b_0}^a k, \qquad (6.20c)$$

udává sovětská norma. Zde $\overline{\varphi}(t)$ se dosazuje podle (2.9). Součinitel k vyjadřuje zvětšení ztrát vlivem nelineárního dotvarování, jaké se projevuje někdy při vysokých napětích betonu v předpjatých průřezech. Jeho hodnota se uvádí $k = 4 + R_{b_1} R_b(t_0)/R_b^{28} \sigma_{b_0}^a$, kde $R_{b_1} \approx \frac{1}{2} R_b^{28}$ je předepsané výpočtové napětí betonu v tlaku za ohybu pro daný druh betonu. Pokud však vyjde $k < 1$, je nutno dosadit $k = 1$. Součinitel k by bylo možno zavést i ve vzorci (6.20). Pro vliv smršťování nedbá sovětská norma stáří betonu a excentricity kabelu a předepisuje $\Delta\sigma_a(t) = \frac{4}{3}\beta \,.\, 400$ kp/cm² (přičemž pro předem předpjaté prvky předepisuje ztráty smrštěním násobit 0,75).

Při určení ztrát předpětí metodou ideálního modulu (odst. 5.12) lze vzhledem k rov. (5.31b) postupovat též tak, že se určí tzv. základní předpínací síla, což je síla, pro niž by v čase t_0 deformace betonu v úrovni kabelů byla nulová. Napětí v čase t jsou pak dána jako napětí v průřezu s ideálními moduly $E_{id}(t)$ odpovídající vnějšímu zatížení a stejné základní předpínací síle.

Příklad 6.3.1. Průřez z předpjatého betonu. Uvažujme průřez předpjaté, letmo betonované konzoly mostu v líci pilíře. Nechť jsou průřezové hodnoty $F_b = 14{,}00$ m², $J_b = 58{,}5$ m⁴, $i_b^2 = 4{,}18$ m², $E_b = 3{,}60 \,.\, 10^6$ Mp/m² (beton 400). Průřez je předpjat kabely o $F_a = 0{,}111$ m², $i_a \doteq 0$, $E_a = 19{,}0 \times 10^6$ Mp/m², $e = -3{,}07$ m (obr. 6.3c). Celkový moment od vlastní váhy g_1 konzoly je $M_{g_1} = -24\,600$ Mp m. Tento moment není zaveden najednou, ale v průběhu výstavby postupně narůstá, stejně jako i předpětí. Napětí kabelů dříve předpjatých vzrůstá vlivem přírůstků momentu od později vybetonovaných částí. Lze jistě podat přesné řešení pro postupně vzrůstající moment, přibližně však stačí uvažovat, že předpětí je zavedeno najednou uprostřed

doby betonování konzoly. Po této době nechť je přírůstek momentu $\Delta M_{g_1} = -13\,600$ Mp m. Doba vybetonování konzoly je 3 měsíce. Pro g_1 je tedy $t_0^{g_1} = 1{,}5$ měsíce, $\overline{\varphi}(\infty)_{g_1} = 4(1 - 0{,}546) = 1{,}82$. Další stálé zatížení přistoupí průměrně za 1 rok po vybetonování líčního průřezu a způsobuje moment $M_{g_2} = -5130$ Mp m. Pro $t_0^{g_2} = 1$ rok je $\overline{\varphi}(\infty)_{g_2} = 4(1 - 0{,}795) = 0{,}820$. Předpínací síla kabelů po krátkodobých ztrátách předpětí se rovná 8950 Mp. Excentricity od těžiště pružného průřezu jsou $e_b = -19{,}0 \,.\, 0{,}111(-3{,}07)/(3{,}60 \,.\, 14{,}0 + 19{,}0 \,.\, 0{,}111) = 0{,}123$ m, $e_a = -3{,}07 + 0{,}123 = -2{,}95$ m.

Výpočet provedeme podle principu superpozice, odděleně pro zatížení g_1, g_2. Počáteční hodnoty jsou $N_{a_0}^{g_1} = 8950 + (-13\,600)(-2{,}95)/[2{,}95^2 + (4{,}18 + 0{,}12^2)\,19{,}0 \,.\, 0{,}111/3{,}60 \,.\, 14{,}0] = 8950 + 369 = 9320$ Mp, $N_{a_0}^{g_2} = 369 \,.\, 5130/13\,600 = 139$ Mp.

Partikulární hodnoty podle (6.17) jsou $N_{a_p}^{g_1} = [24\,600 \,.\, 3{,}07 + (-3 \times 10^{-4}/4)\,3{,}60 \,.\, 10^6 \,.\, 58{,}5]/(4{,}18 + 3{,}07^2) = 4400$ Mp, $N_{a_p}^{g_2} = 5130 \,.\, 3{,}07/(4{,}18 + 3{,}07^2) = 1160$ Mp. Dále je $\lambda = 1/[1 + 3{,}60 \,.\, 14{,}0/19{,}0 \,.\, 0{,}111(1 + 3{,}07^2/4{,}18)] = -0{,}1195$.

Výsledek je $N_{a_\infty} = -N_{b_\infty} = [9320 + (4400 - 9320)\,(1 - e^{-0{,}1195 \cdot 1{,}82})] + [139 + (1160 - 139)\,(1 - e^{-0{,}1195 \cdot 1{,}82})] = 8600$ Mp. Ztráta předpětí je $-9{,}1$ %, $M_{b_\infty} = -24\,600 - 5130 + 8600 \,.\, 3{,}07 = -3330$ Mp m. Pro nahodilé zatížení je nutno přičíst příslušné ΔN_a.

6.4. Spojitě nehomogenní průřez

Doposud jsme řešili nehomogenní průřez, jejž lze rozložit na homogenní části. Nyní se věnujme řešení průřezu s plynulým průběhem nehomogenity.

Mějme průřez s osou souměrnosti z, jejíž počátek je v těžišti průřezu. Nechť je průřez zatížen normálnou silou $N(t)$ v těžišti průřezu a momentem $M(t)$, působícím v rovině, jež prochází osou z. Nehomogenita průřezu nechť je dána funkcí $\varkappa = \varkappa(z)$, jež je spojitě proměnná s pořadnicí z a má též spojitou 1. a 2. derivaci. Nechť $\varepsilon(z, t)$ značí poměrné protažení a $\sigma(z, t)$ normálné napětí v čase t ve vlákně průřezu daném pořadnicí y.

Zachování rovinnosti průřezu vyžaduje, aby bylo $\partial^2\varepsilon(z, t)/\partial z^2 = 0$. Protože podle rovnic (3.3) platí $E(z)\,\partial\varepsilon(z, t)/\partial\varphi = \partial\sigma(z, t)/\partial\varphi + \varkappa(z)\,\sigma(z, t)$, dostáváme pro napětí $\sigma(z, t)$ rovnici

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\sigma}{E}\right) + \varkappa\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\sigma}{E}\right) + 2\frac{\partial\varkappa}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sigma}{E}\right) + \frac{\partial^2\varkappa}{\partial z^2}\frac{\sigma}{E} = 0, \quad (6.21)$$

což je lineární parciální diferenciální rovnice 3. řádu, která spolu se dvěma integrálními podmínkami rovnováhy průřezu $\iint_F \sigma(z, t)\,dy\,dz = N(t)$, $\iint_F \sigma(z, t)\,z\,dy\,dz = M(t)$ určuje $\sigma(z, t)$ (F značí plochu průřezu).

Obecným řešením, které má spíše teoretický význam, se zabývat nebudeme. Ukažme pouze, za jakých podmínek zůstává při $E(z) = E = \text{konst}$ napětí $\sigma(z, t)$ rozděleno přímkově po výšce průřezu z, tj. kdy platí $\partial\sigma/\partial z = \text{konst}$ pro všechna z, $t > t_0$. Dosazením do rovnice (6.21) a řešením vzniklé obyčejné lineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\varkappa(z)$ s ohledem na podmínky rovnováhy průřezu dostaneme, že přímkové rozdělení $\sigma(z, t)$ může nastat a nastane, je-li pro všechna z při $t > t_0$ identicky splněn vztah $\varkappa(z) = C_1(t) + C_2(t) \times \times M(t)/[zM(t) + i^2N(t)]$, kde funkce $M(t)$, $N(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$ musí být dány tak, aby pravá strana byla nezávislá na čase t. Je to zcela speciální případ zatížení a průběhu $\varkappa = \varkappa(z)$. Nastane to např. pro $\varkappa(z) = C_1 + C_2/(C_3z + i^2)$, $M(t) = C_3N(t)$, kde C_1, C_2, C_3 jsou libovolné konstanty (nebo ještě speciálněji pro homogenní průřez, $\varkappa = \text{konst}$).

6.5. Deska dvousměrně předpjatá

Přesuny napětí po normále desky nehomogenní po tloušťce lze přibližně řešit podobně jako přesuny napětí v nehomogenních průřezech prutů — odděleně od spolupůsobení desky jako celku, tj. na odděleném samostatném prvku desky. Odpovídá to volné desce se stejnými ohybovými momenty ve všech bodech.

Takovéto řešení má význam hlavně pro výpočet ztrát předpětí v desce předpjaté dvěma směry (speciální případ této úlohy viz též [46]). Uvažujme nezávislý prvek desky v pravoúhlých souřadnicích x, y, zatížený ohybovými momenty M_x, M_y a normálnými silami N_x, N_y (uprostřed desky). Podobně jako v odst. 6.1 vytvoříme základní statickou soustavu oddělením betonové desky a kabelů, čímž jako neznámé veličiny vystoupí tahové síly N_{a_x}, N_{a_y} kabelů, normálné síly N_{b_x}, N_{b_y} a ohybové momenty M_{b_x}, M_{b_y} v betonové desce. Označme d tloušťku desky, f_x, f_y měrné plochy kabelů na jednotku délky, e_x, e_y jejich excentricity od střednicové plochy desky. Podmínky rovnováhy zní $N_x = N_{a_x} + N_{b_x}$, $N_y = N_{a_y} + N_{b_y}$, $M_x = M_{b_x} + N_{a_x}e_x$, $M_y = M_{b_y} + N_{a_y}e_y$. Jsou čtyři, takže ze šesti neznámých jsou pouze dvě staticky neurčité, úloha je dvakrát staticky neurčitá. Za staticky neurčité volme tahové síly kabelů N_{a_x}, N_{a_y}.

Řešení je opět dáno dvěma rovnicemi tvaru (4.9). Jejich koeficienty $\delta_{a_{xx}}$, $\delta_{a_{xy}}$, $\delta_{a_{yy}}$, $\delta'_{a_{xx}}$, ..., δ'_{a_x}, ... lze určit z rovnovážných zatěžovacích stavů základní soustavy.

Pro zatížení $N_{a_x} = 1$, $N_{a_y} = 0$ při $M_x = M_y = N_x = N_y = 0$ plyne z podmínek rovnováhy základní soustavy $M_{b_x} = -e_x$, $M_{b_y} = 0$, $N_{b_x} = 1$, $N_{b_y} = 0$. Odpovídající deformace ve smyslu vnitřních sil N_{a_x}, N_{a_y}, M_{b_x}, M_{b_y}, N_{b_x}, N_{b_y} jsou po řadě $1/E_a f_x$, 0, $-12e_x/E_b d^3$, $12\mu e_x/E_b d^3$, $-1/E_b d$, $\mu/E_b d$.

Pro zatížení $N_{a_x} = 0$, $N_{a_y} = 1$ při $M_x = M_y = N_x = N_y = 0$ plyne $M_{b_x} = 0$, $M_{b_y} = -e_y$, $N_{b_x} = 0$, $N_{b_y} = -1$.

Vnějšímu zatížení M_x, M_y, N_x, N_y při $N_{a_x} = N_{a_y} = 0$ odpovídá $M_{b_x} = M_x$, $M_{b_y} = M_y$, $N_{b_x} = N_x$, $N_{b_y} = N_y$.

Podle principu virtuálných prací lze z těchto stavů určit koeficienty

$$\delta_{a_{xx}} = \frac{1}{E_a f_x} + \frac{1}{E_b d} + \frac{12e_x^2}{E_b d^3}, \quad \delta_{a_{yy}} = \frac{1}{E_a f_y} + \frac{1}{E_b d} + \frac{12e_y^2}{E_b d^3}, \tag{6.22}$$

$$\delta_{a_{xy}} = -\frac{\mu}{E_b d} - \frac{12\mu e_x e_y}{E_b d^3},$$

$$\delta'_{a_{xx}} = \frac{1}{E_b d} + \frac{12e_x^2}{E_b d^3}, \quad \delta'_{a_{yy}} = \frac{1}{E_b d} + \frac{12e_y^2}{E_b d^3}, \tag{6.23}$$

$$\delta'_{a_{xy}} = -\frac{\mu'}{E_b d} - \frac{12\mu' e_x e_y}{E_b d^3},$$

$$\delta'_{a_x} = \frac{12e_x}{E_b d^3}(-M_x + \mu' M_y) + \frac{-N_x + \mu' N_y}{E_b d} + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \quad \delta_{a_x} = \ldots, \tag{6.24}$$

jimiž je matematické řešení určeno (kap. 4).

Členy $\delta'_{a_{xy}}$ způsobují, že ztráty předpětí jsou menší než u jednosměrně předpjaté desky, avšak jen tehdy, není-li $\mu' = 0$. Je-li $\mu' = \mu = 0$, úloha se rozpadne na dva nezávislé jednosměrně předpjaté systémy a ztráty předpětí nejsou příčným předpětím ovlivněny.

Poznámka. Řešení vnitřních sil v prvku dvouvrstvové desky je obdobné (4krát staticky neurčité a vede k systému čtyř rovnic).

6.6. Deformace prutu s nehomogenním průřezem

Změnu křivosti $\partial^2 w/\partial x^2$ a poměrného protažení ε (v těžišti průřezu) prutu složeného průřezu lze určit podle obecné rovnice (4.5) pro deformaci staticky neurčitého systému. Změna křivosti představuje deformaci $\mathrm{d}\delta_M(t)$ ve smyslu momentu M v daném průřezu (k těžišti pružného složeného průřezu), změna protažení je deformace $\mathrm{d}\delta_N(t)$ ve smyslu normálné síly N v těžišti složeného průřezu. Rovnice (4.5) zde tedy zní $\partial(\partial^2 w/\partial x^2)/\partial\varphi = -(\partial M/\partial\varphi)/E_n J_n + \delta'_M + \delta'_{sm_M}$, $\partial\varepsilon/\partial\varphi = (\partial N/\partial\varphi)/E_n F_n + \delta'_N + \delta'_{sm_N}$.

Podle odst. 4.2 $\delta'_M(t)$, popř. $\delta'_N(t)$ nebo δ'_{sm_M}, popř. δ'_{sm_N} jsou deformace odpovídající na daném pružném průřezu vnitřním silám $\varkappa_1 M_1(t)$, $\varkappa_1 N_1(t)$, $\varkappa_2 M_2(t)$, $\varkappa_2 N_2(t)$ nebo vnitřním silám $N'_{1_{sm}} = E_1 F_1$, $\varkappa_1 \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, $N'_{2_{sm}} = E_2 F_2 \varkappa_2 \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Podle rovnic rovnováhy (6.3) odpovídající vnější zatížení průřezu ($c = 0$, $a_1 = e_1$, $a_2 = e_2$) je $M = \varkappa_1(M_1 + e_1 N_1) + \varkappa_2(M_2 + e_2 N_2)$, popř. $N = \varkappa_1 N_1 + \varkappa_2 N_2$ nebo $M'_{sm} = e_1 N'_{1_{sm}} + e_2 N'_{2_{sm}}$, $N'_{sm} = N'_{1_{sm}} + N'_{2_{sm}}$. Odtud plyne

$$E_n J_n \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial M}{\partial\varphi} - \varkappa_1(M_1 + e_1 N_1) - \varkappa_2(M_2 + e_2 N_2) + M'_{sm}, \tag{6.25}$$

$$E_n F_n \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} = \frac{\partial N}{\partial\varphi} + \varkappa_1 N_1 + \varkappa_2 N_2 + N'_{sm}. \tag{6.26}$$

Deformaci prutu složeného průřezu je tedy možno vyjádřit podle průběhu vnitřních sil v jednotlivých částech.

Poznámka. Tytéž hodnoty plynou též přímo podle principu virtuálních prací (odst. 4.2) při virtuálním zatěžovacím stavu $\overline{M} = 1$, popř. $\overline{N} = 1$ složeného průřezu. Pro $\overline{M} = 1$ je např. $\overline{M}_1 = E_1 J_1/E_n J_n$, $\overline{N}_1 = E_1 F_1 e_1/E_n J_n$, ..., odkud plyne $\delta'_{st_M} = \overline{M}_1(M_1/E_1 J_1) + \overline{N}_1(N_1/E_1 F_1) + \overline{M}_2(M_2/E_2 J_2) + \overline{N}_2(N_2/E_2 F_2)$, $\delta'_{sm_{1_M}} = \overline{N}_1 \varkappa_1 \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty) + \overline{N}_2 \varkappa_2 \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

U průřezu, kde jedna část je ocelová (předpjatý beton, spřažený ocelobetonový průřez), platí jednodušeji

$$E_n J_n \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial M}{\partial\varphi} - M_b + e_b N_b + M'_{sm}, \tag{6.27}$$

$$E_n F_n \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} = \frac{\partial N}{\partial\varphi} + N_b + N'_{sm}.$$

(U spřaženého průřezu ocelobetonového lze položit $M_b = 0$.) Dosazením průběhu $M_b(t)$, $N_b(t)$ do (6.27) dostaneme při stálém zatížení a relativně malém momentu setrvačnosti jedné části

$$E_n J_n \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_{b_p} - e_b N_{b_p} - e_b E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} - (M_{b_0} + e_b N_{b_0} - M_{b_p} - e_b N_{b_p})\, \mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}(t)}, \tag{6.28}$$

$$E_n F_n \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} = N_{b_p} + E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + (N_{b_0} - N_{b_p})\, \mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}(t)}.$$

Integrací se obdrží

$$E_n J_n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M - \left(M_{b_p} + e_b N_{b_p} + e_b E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right)\overline{\varphi}(t) -$$

$$- (M_{b_p} + e_b N_{b_p} - M_{b_0} - e_b N_{b_0}) \frac{1}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}(t)}) , \qquad (6.29)$$

$$E_n F_n \varepsilon = N + \left(N_{b_p} + E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right)\overline{\varphi}(t) + (N_{b_p} - N_{b_0}) \frac{1}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}(t)}).$$

Pro malé hodnoty $\lambda\overline{\varphi}$ ($\lambda\overline{\varphi} \ll 1$) lze z rozvoje $\mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}}$ v mocninnou řadu ponechat pouze členy do 1. řádu

$$E_n J_n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \doteq -M - \left(M_{b_0} + e_b N_{b_0} + e_b E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right)\overline{\varphi}(t), \qquad (6.30)$$

$$E_n F_n \varepsilon \doteq N + \left(N_b + E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\right)\overline{\varphi}(t).$$

Deformaci složeného prutu lze jinak vyjádřit též přímo podle rovnice (4.2) jako deformaci jedné části, přičemž výsledek musí být stejný. Snadné je to zvláště u ocelobetonového nosníku, kde deformace se rovná pružné deformaci ocelového nosníku, tj. $\partial^2 w/\partial x^2 = -M_a/E_a J_a$, $\varepsilon_a = N_a/E_a F_a$, kde ε_a značí deformaci v těžišti ocelového nosníku. Jestliže M a N jsou konstantní, N působí v těžišti ocelové části, v betonu nevzniká tah a platí $E_b J_b \ll E_a J_a$, $\varkappa_b = 1$, obdržíme dosazením za M_a, N_a podle (6.12b) a (6.13b)

$$E_a J_a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_{a_0} - \left(M - N c_a - e E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} - M_{a_0}\right) \times$$

$$\times (1 - \mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}(t)}), \qquad (6.31)$$

$$E_a F_a \varepsilon_a = N_{a_0} + \left(N + E_b F_b \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} - N_{a_0}\right)(1 - \mathrm{e}^{\lambda\overline{\varphi}(t)}),$$

kde λ je dáno (6.12b). Jestliže celé zatížení M, N bylo zavedeno v čase τ již na spřaženém ocelobetonovém nosníku, platí $M_{a_0} = M E_a J_a / E_n J_n$, $N_{a_0} = N E_a F_a / E_n F_n$. Dosadíme-li tyto vztahy do (6.31), obdržíme

$$E_n J_n \frac{\partial^2 w(t,\tau)}{\partial x^2} = -M(\tau)\,[1 + \varphi_M(t,\tau)] - \overline{M}_{sm}\varphi_M(t,\tau),$$

$$E_n F_n \varepsilon_a(t,\tau) = N(\tau)\,[1 + \overline{\varphi}_N(t,\tau)] + E_n F_n \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}\varphi_N(t,\tau) +$$

$$+ e_a \frac{E_n F_n}{E_n J_n} M\, \mathrm{e}^{\lambda[\varphi(t)-\varphi(\tau)]}, \qquad (6.32)$$

kde

$$\varphi_M(t,\tau) = \left(\frac{E_n J_n}{E_a J_a} - 1\right)(1 - \mathrm{e}^{\lambda[\varphi(t)-\varphi(\tau)]}),$$

$$\varphi_N(t,\tau) = \frac{E_b F_b}{E_a F_a}(1 - \mathrm{e}^{\lambda[\varphi(t)-\varphi(\tau)]}), \qquad (6.33)$$

$$\overline{M}_{sm} = \frac{e E_b F_b}{1 - E_a J_a / E_n J_n} \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

Podobně pro obecný prut složený ze dvou částí o $E_1 J_1 \ll E_2 J_2$ bychom psaním rovnice (4.2) pro část 2 mohli odvodit stejný vztah jako (6.32), v němž však je obecněji (pouze pro ohyb)

$$\varphi_M(t,\tau) = \left(1 + \frac{\varkappa_2}{\lambda}\right)\left(\frac{E_n J_n}{\varkappa_2 E_n' J_n} - 1\right)(1 - \mathrm{e}^{\lambda[\varphi(t)-\varphi(\tau)]}) +$$

$$+ \frac{E_n J_n}{E_n' J_n}[\varphi(t) - \varphi(\tau)], \qquad (6.34)$$

$$\overline{M}_{sm} = \frac{1 - \varkappa_2[\varphi(t) - \varphi(\tau)]/\varphi_M(t,\tau)}{1 - \varkappa_2 E_n' J_n / E_n J_n},$$

kde λ je dáno rovnicí (6.10a). Pro ocelobetonový průřez, v němž betonová i ocelová část mají společné těžiště (centricky předpjatý nebo vyztužený sloup ap.), lze podle (6.14) dostat vztah (přesný)

$$\varphi_M(t,\tau) = \frac{E_b J_b}{E_a J_a}\left(1 - \mathrm{e}^{\lambda_M(\varphi(t)-\varphi(\tau))}\right), \quad \overline{M}_{sm} = 0, \qquad (6.34a)$$

kde λ_M je dáno rovnicí (6.14a) ($e_a = 0$) a $\varphi_N(t,\tau)$ je stejné jako v (6.33), avšak s hodnotou λ podle (6.14a).

Funkci $\varphi_M(t,\tau)$ bychom mohli označit za náhradní součinitel dotvarování pro složený prut. Význam $\varphi(t)$ však zcela nemá, neboť zřejmě $\varphi_M(t,\tau) \neq \varphi_M(t,0) - \varphi_M(\tau,0)$. (Není přesně splněn předpoklad 2 v odst. 2.2. Složený průřez jako celek má tedy dlouhodobé vratné deformace, i když jeho části vratné deformace nemají.) V posledním vztahu lze rovnost uvažovat pouze přibližně pro malé $|\lambda[\varphi(t) - \varphi(\tau)]|$, menší než asi 0,1 až 0,4, nebo pro malá $E_1 F_1 / E_2 F_2$ anebo pro malé rozdíly $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ (obvykle to nastává, neboť bývá $\lambda \ll 1$). V těchto případech lze φ_M považovat přibližně za náhradní součinitel dotvarování.

Při proměnném M, N bychom mohli příslušné deformace odvodit podle principu superpozice. Diferencováním získaných vztahů bychom však ne-

obdrželi rovnice tvaru (4.2), ale integrálně diferenciální rovnici (vyjma speciálního případu $\varkappa_1 = \varkappa_2$, tj. homogenního průřezu).

Poznámka. Při matematicky zcela přesném řešení bylo by vhodné odvodit diferenciální rovnici mezi M a $\partial^2 w/\partial x^2$, popř. N a ε. Nejsnáze ji lze získat z odpovídající rovnice teorie pružnosti $M = E_n J_n(\partial^2 w/\partial x^2)$, $N = E_n F_n$, zamění-li se v nich E_1, E_2 za příslušné operátory podle (3.9a). Po úpravách obdrželi bychom pro obecně nehomogenní průřez

$$E_n J_n \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [\varkappa_2 E_1 F_1(i_1^2 + e_1^2) + \varkappa_1 E_2 F_2(i_2^2 + e_2^2)]\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \tag{6.35}$$
$$= \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\partial M}{\partial \varphi} + \varkappa_1 \varkappa_2 M$$

a speciálně pro průřez s jednou částí z oceli

$$E_n J_n \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varkappa_b E_a F_a(i_a^2 + e_a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial M}{\partial \varphi} + \varkappa_b M. \tag{6.35a}$$

Obdobné rovnice platí pro vztah N a ε (N, ε, $E_n F_n$, $E_a F_a$ po řadě místo M, $\partial^2 w/\partial x^2$, $E_a J_n$, $E_a J_a$).

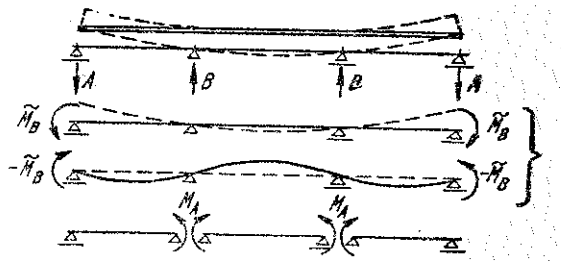
6.7. Spolupůsobení konstrukce jako celku

Dosud jsme se zabývali řešením vnitřních sil ve složených průřezech za předpokladu, že celkové vnitřní síly M, N v průřezech jsou předem známy, což nastává přesně jen u konstrukcí, které podle teorie pružnosti jsou staticky určité. U konstrukcí staticky neurčitých deformace prutů vyvolávají změny zatížení jednotlivých průřezů a naopak změny rozdělení vnitřních sil v průřezu vyvolávají změny deformace prutů, takže konstrukci i složené průřezy je nutno uvažovat jako spolupůsobící celek, v němž vnější statická neurčitost konstrukce a vnitřní statická neurčitost průřezů se navzájem prolínají. Pro složené průřezy jako celek není splněn přesně předpoklad 2 (odst. 2.2), takže přesný výpočet bylo by nutno provádět podle obecné teorie z odst. 10.2.

a) Uvažujme nyní konstrukci, jejíž všechny pruty mají stálý průřez a $\varkappa_i = \text{konst}$. Je to častý případ spřažených spojitých nosníků (nehledí-li se přibližně na případně různou polohu předpínací výztuže). Deformace všech průřezů takovéto konstrukce je vyjádřena pak touž funkcí času, např. (6.34). Jestliže u takovéto konstrukce řešíme vliv zatížení, které veškeré přistoupilo až na hotové spřažené konstrukci, a neuvažujeme zatížení zavedená zpočátku na jednotlivé části ani smršťování, předpětí, posuvy podpor ap., jsou celkové vnitřní síly M, N v průřezech dány řešením konstrukce podle teorie pružnosti,

stejně jako u homogenní staticky neurčité konstrukce. Průřezy lze proto řešit jako samostatné. Ohybové deformace od stálého zatížení jsou $\bar{\varphi}_M$ násobkem pružné deformace.

Vznikají-li u takovéto konstrukce posuvy podpor, změny statického působení, změny teploty, smršťování ap., jsou celkové vnitřní síly $M(t)$, $N(t)$ časově proměnné. Pro malé $|\lambda\bar{\varphi}|$ lze přibližně uvažovat $\varphi_M(t, \tau) \doteq \varphi_M(t, 0) - \varphi_M(\tau, 0)$ (zanedbání vratných deformací složeného průřezu), takže rovnice (6.32) je pak analogická se základní rovnicí (2.1) a plynou z ní rovnice podobné jako u homogenní konstrukce. Proměna všech vnitřních sil se proto při stálém zatížení pro malá $|\lambda\bar{\varphi}|$ děje přibližně podle funkce $e^{-\varphi_M}$.



Obr. 6.5. Spojitý spřažený ocelobetonový nosník (vliv smrštění)

Ukažme to na řešení spojitého spřaženého nosníku ocelobetonového stálého průřezu i stálého stáří betonové desky, za předpokladu, že v betonu nikde nevzniká tah (obr. 6.5). Označme M_{el} celkové průřezové momenty vypočtené podle teorie pružnosti (spojitý nosník stálého průřezu) pro dané stálé vnější zatížení, M_{el_s}, popř. $M_{el_{sm}}$ celkové momenty vyvolané v čase t_0 náhlým posuvem podpor a změnou teploty, poměrnými zakřiveními $-M_{sm}/E_n J_n$ od smrštění (podle teorie pružnosti) a M_a^{I} momenty vyvolané v ocelovém nosníku od části zatížení zavedeného na samotný ocelový nosník před spřažením nosníku s deskou v čase t_0. Pak pro malá $|\lambda\bar{\varphi}|$ přibližně platí, že celkové průřezové momenty v čase t jsou $M(t) \doteq M_{el} + M_{el_s} e^{-\varphi_M(t, t_0)} + (M_{el_{sm}} + M_a^{\mathrm{I}})[1 - e^{-\varphi_M(t, t_0)}]$. K určení vnitřních sil $M_a(t)$, $N_a(t)$, $N_b(t)$, ... v částech průřezu by pak bylo nutno řešit průřez podle odst. 6.2 pro proměnné zatížení $M(t)$.

Poznámka: Případ lze řešit i přesně. Záměnou E za operátor (3.9a) v rovnicích teorie pružnosti lze po úpravách získat rovnice tvaru (4.20), v nichž X_p jsou vnitřní síly, jaké by vznikly od vnějšího zatížení a posuvu podpor na samotném ocelovém nosníku.

b) Jsou-li složené průřezy prutů v různých místech konstrukce různé (nebo stáří betonu proměnné), platí pro deformaci každého průřezu — jak je vidět např. z (6.34) — jiné funkce φ_M (různá λ). Zvolíme-li jednu z nich za základní, pak pro ostatní analogicky k (2.15) platí — přesně vzato — časově

proměnný koeficient rychlosti deformace dotvarování $\varkappa_M = \mathrm{d}\varphi_{M(\varkappa)}/\mathrm{d}\varphi_M$, $\varkappa_M = \varkappa_M(t, \tau)$, takže přetvárné výminky konstrukce tvaru (4.9) vlastně neplatí nebo, při zanedbání závislosti $\varkappa_M$ na τ, platí s proměnnými koeficienty (odst. 10.1). Řešení lze zjednodušit, předpokládáme-li přibližně vzájemnou afinitu křivek $\varphi_{M(\varkappa)}(t)$ pro různé průřezy ($\varkappa$). Můžeme to vyjádřit náhradním koeficientem afinity dotvarování $\varkappa_M$, definovaným analogicky jako $\varkappa_M = \varphi_{M(\varkappa)}(\infty, t_0)/\varphi_M(\infty, t_0)$, kde $\varphi_M(t, \tau)$ je zvolená základní náhradní křivka dotvarování. Jedná-li se o průřez pouze ocelový, je $\varkappa_M \doteq 0$; za prut pouze ocelový je třeba pokládat též úsek spřaženého nosníku ocelobetonového, kde předpokládáme v desce od celého stálého zatížení vznik tahu (vzniká-li tedy v desce tah, je nosník nehomogenní i při stálém průřezu). Konstrukci lze řešit pak úplně stejně jako v kapitole 4. Výsledkem je průběh celkových momentů $M(t)$ a sil $N(t)$, podle něhož je dále nutno řešit průběh vnitřních sil v jednotlivých částech průřezu, což je celkově dosti pracné (odst. 6.1.2). Bývá proto lepší při proměně celkových vnitřních sil $M(t)$, $N(t)$ řešit celek konstrukce přibližně (odst. 6.8).

Poznámka. U konstrukce složené pouze z úseků prutů stálého průřezu a stálého $\varkappa_i$, tj. vyskytují-li se pouze náhlé změny průřezu, lze řešení též formulovat rovnicemi tvaru (4.9), zvolí-li se za další staticky neurčité některé vnitřní síly v částech průřezu. Těchto rovnic je nejvýše $n + s_1 + \ldots + s_r$, kde n je statická neurčitost konstrukce a $s_1, \ldots, s_r$ jsou vnitřní statické neurčitosti průřezů jednotlivých úseků prutů. Při plynulé proměně průřezu nebo $\varkappa_i$ počet rovnic neomezeně vzrůstá a řešení vede — přesně vzato — na systém nejvýše n Volterrových integrálních rovnic, podobně jako v odst. 10.2 (i přes předpoklad 2, odst. 2.2).

c) Některé konstrukce se složenými průřezy lze aspoň přibližně řešit s užitím součinitele dotvarování $\varphi(t)$ podle systému tvaru (4.9), psaného pro staticky neurčité veličiny konstrukce bez ohledu na vnitřní neurčitost průřezů. Aby to bylo možné, je vzhledem k porovnání (6.25-6) a (4.2) nutno, aby výrazy

$$\varkappa_M(t) = \frac{1}{M(t)} \{\varkappa_1[M_1(t) + e_1 N_1(t)] + \varkappa_2[M_2(t) + e_2 N_2(t)]\} \qquad (6.36)$$

a

$$\varkappa_N(t) = \frac{1}{N(t)} [\varkappa_1 N_1(t) + \varkappa_2 N_2(t)]$$

byly přibližně konstantní. Můžeme je pak považovat za náhradní koeficienty afinity dotvarování pro složený průřez. Abychom zjistili, jak velká je proměna $\varkappa_M$, $\varkappa_N$, vypočteme jejich hodnoty pro několik, dříve v příkladech vyšetřovaných konkrétních průřezů.

U nosníku spřaženého průřezu betonového podle příkladu 6.1.1 se moment k těžišti složeného průřezu včetně vlivu předpětí rovná $M = 230 - 450 \cdot 0{,}81 = -134$ Mp m. Odtud lze vypočíst $\varkappa_M(t_0) = [1{,}37 \cdot 0 + 0{,}80(-8 - 0{,}28 \cdot 450)]/(-134) = 0{,}800$, $\varkappa_M(\infty) = [1{,}37(-0{,}131) + (-0{,}580)(-33{,}4) + 0{,}80(-39 + 0{,}280(-417))]/(-134) = 0{,}734$. Rozdíl těchto hodnot je tedy za předpokladu konstantní hodnoty předpětí poměrně malý a výpočet konstrukce bylo by tedy možno přibližně oddělit od výpočtu průřezu a pro daný průřez uvažovat $\varkappa_M \doteq 0{,}77$.

Spřažený ocelobetonový nosník podle příkladu 6.2.1. Kdyby nebylo v ocelovém nosníku předpětí $-300 \cdot 10^5$ kp cm, byly by počáteční hodnoty v uvažovaném průřezu $M_a = 113 \cdot 10^5$ kp cm, $N_a = 1{,}84 \cdot 10^5$ kp cm. Odtud plyne, že počáteční hodnota předpětí je dána momentem $\Delta M_a = (-90 - 113) \cdot 10^5 = -203 \cdot 10^5$ kp cm a normálnou silou $\Delta N_a = (3{,}41 - 1{,}84) \cdot 10^5 = 1{,}57 \cdot 10^5$ kp cm, což vyvozuje moment k těžišti složeného průřezu $-203 \cdot 1{,}57 \cdot 66{,}5 = -99 \cdot 10^5$ kp cm. Odtud lze vypočíst $\varkappa_M(t_{0_1}) = (1{,}47 + 62{,}5 \cdot 3{,}41)/(350 - 99) = 0{,}895$, $\varkappa_M(t_{0_2}) = (0{,}16 + 24{,}6)/75 = 0{,}331$, $\varkappa_M(\infty) = (0 + 18{,}5)/(425 - 99) = 0{,}057$. Tyto hodnoty jsou natolik rozdílné, že výpočet spřaženého ocelobetonového nosníku nelze oddělit od výpočtu průřezů.

Nosník z předpjatého betonu podle příkladu 6.3.1:

$$\varkappa_M(t_{0_1}) = (4000 - 9320 \cdot 0{,}123)/(-24\,600 + 9320 \cdot 2{,}95) = 1{,}00;$$
$$\varkappa_M(t_{0_2}) = (-4705 - 139 \cdot 0{,}123)/(-4705 - 139 \cdot 2{,}95) = 0{,}92;$$
$$\varkappa_M(\infty) = (-3320 - 0{,}123 \cdot 8600)/(-29\,730 + 8600 \cdot 2{,}95) = 1{,}00.$$

Tyto rozdíly jsou přijatelné velikosti (možno uvažovat $\varkappa_M \doteq 1{,}00$), avšak přesto je z nich vidět, že výpočet konstrukce z předpjatého betonu odděleně od výpočtu průřezů je dosti hrubý. Proti spřaženému ocelobetonovému nosníku je tento případ příznivější hlavně proto, že předpětí ocelové části je mnohem méně proměnné a s časem zmizí značně menší jeho část (menší poměrná plocha a vyšší napětí oceli).

Časová proměna $\varkappa_M$ a $\varkappa_N$ je tedy dosti malá u průřezu z předpjatého betonu nebo z betonu nepříliš různého stáří (malá homogenita průřezu). Pro takovéto konstrukce lze počítat spolupůsobení podle rov. (6.36) při konstantním $\varkappa_M$, $\varkappa_N$. Dále vidíme, že naprosto to není možné u spřažených ocelobetonových nosníků, poněvadž se předpětí ocelové části velmi mění — vzhledem k většímu F_a/F_b a menšímu napětí oceli.

U průřezů z předpjatého betonu nebo z betonu nepříliš různého stáří

($\Delta t <$ asi $^1/_2$ roku) lze položit $\varkappa_M \doteq \varkappa_N \doteq 1$ (nebo $\varkappa_b$). Jinak lze $\varkappa_M$, ... též vypočíst dosazením počátečních hodnot M_0, M_{1_0}, N_{1_0}, ... do (6.36). Z rovnice (6.36) dále vidíme, že poměr $[M_1(t) + e_1 N_1(t)]/M(t)$ musí přibližně být konstantní. To vyjadřuje, že *poloha neutrální osy* je v těchto případech *přibližně stálá* a lze tedy přibližně psát $[M_1(t) + e_1 N_1(t)]/E_1 F_1 (i_1^2 + e_1^2) \doteq M(t)/E_n J_n$. $N_1(t)/E_1 F_1 \doteq N(t)/E_n F_n$. Odtud plynou přibližné vztahy

$$\varkappa_M \doteq \frac{1}{E_n J_n}[\varkappa_1 E_1 F_1 (i_1^2 + e_1^2) + \varkappa_2 E_2 F_2 (i_2^2 + e_2^2)],$$
$$\varkappa_N \doteq \frac{1}{E_n F_n}(\varkappa_1 E_1 F_1 + \varkappa_2 E_2 F_2). \tag{6.36a}$$

(Chceme-li v rov. (6.36a) uvažovat pouze plochu betonu $E_b F_b$ místo $E_n F_n$, je třeba tyto hodnoty znásobit $E_b J_b/E_n J_n$, $E_b F_b/E_n F_n$.)

Při výpočtu spolupůsobení konstrukce jako celku je nutno dát zvláště pozor na to, nevzniká-li v betonových částech některých průřezů tah, tj. trhliny. Pak tyto části průřezů neuvažujeme, neboť nespolupůsobí (jako např. horní deska spřaženého ocelobetonového nosníku nad podporou, není-li předepjata).

d) Předpětí na staticky neurčité konstrukci vyvolává tzv. *staticky neurčité vnitřní síly od předpětí*. (Jsou to části staticky neurčitých veličin, které odpovídají účinku předpětí bez zatížení.) V praxi se obvykle uvažují jako konstanty vypočtené podle teorie pružnosti pro časově střední hodnoty předpětí. To však platí jen přibližně, neboť předpětí je časově proměnné a staticky neurčité momenty od předpětí též zpětně proměnu předpětí ovlivňují. Řešením podle rovnic (4.9) při konstantním zatížení tyto síly vycházejí konstantní, pouze když se uvažuje konstantní předpětí. Libovolně přesné řešení lze získat přibližnou konvergující metodou podle následujícího odstavce.

Podle rovnic (4.9) lze provést též výstižnější přibližné řešení předpjaté konstrukce, uvažuje-li se proměnné předpětí vypočtené nezávisle na spolupůsobení konstrukce, tj. na samostatném průřezu, při koeficientech afinity podle (6.36). Vypočtou se hodnoty δ'_{i_0} a δ_{i_0}, odpovídající vnějšímu zatížení a počátečním hodnotám předpínacích sil, a hodnoty $\delta'_{i\infty}$, $\delta_{i\infty}$, odpovídající konečným hodnotám předpínacích sil. V rovnicích (4.9) pak lze přibližně zavést

$$\delta'_i(t) = \delta'_{i_0} + (\delta'_{i\infty} - \delta'_{i_0})\,\bar{\varphi}(t), \quad \frac{\mathrm{d}\delta_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\delta_{i\infty} - \delta_{i_0}}{\bar{\varphi}(\infty)},$$

čemuž odpovídá partikulární řešení podle rov. (4.17.1—3). [Popřípadě lze uvažovat též proměnu $\delta'_i(t) = \delta'_{i_0} + (\delta'_{i\infty} - \delta'_{i_0})(1 - \mathrm{e}^{\lambda\bar{\varphi}(t)})/(1 - \mathrm{e}^{\lambda\bar{\varphi}(\infty)})$, $\mathrm{d}\delta_i(t)/\mathrm{d}\varphi = (\delta_{i\infty} - \delta_{i_0})\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\bar{\varphi}(t)}/(1 - \mathrm{e}^{\lambda\bar{\varphi}(\infty)})$ nebo $\delta'_i(t) = \delta'_{i_0} + (\delta_{i\infty} - \delta_{i_0})\,\bar{\varphi}(t) \times [1 + \frac{1}{2}\lambda\bar{\varphi}(t)]/\bar{\varphi}(\infty)\,[1 + \frac{1}{2}\lambda\bar{\varphi}(\infty)]$, $\mathrm{d}\delta_i/\mathrm{d}\varphi = \ldots$, což je však složitější).

Staticky neurčité momenty od předpětí zavedeného v čase t_1 na definitivním statickém systému homogenní staticky neurčité konstrukce mají za předpokladu lineárního průběhu předpínacích sil ve $\bar{\varphi}$ hodnoty

$$\Delta M_{p\check{r}}(t_1)\left[1 - \frac{\alpha_1}{\bar{\varphi}_1(\infty)}(1 - \mathrm{e}^{-\bar{\varphi}_1(t)})\right], \tag{6.37a}$$

kde $\Delta M_{p\check{r}}(t_1)$ jsou staticky neurčité momenty od předpětí v čase t_1 podle teorie pružnosti a α_1 jsou poměrné ztráty předpětí od času t_1 do ∞ vypočtené (nebo odhadnuté) na samostatném průřezu, neboť ztráty předpětí v průřezech se mění staticky neurčitými momenty od předpětí jen nepatrně.

Je-li předpětí na homogenní konstrukci zavedeno již před zmonolitněním konstrukce na staticky určité soustavě (např. u letmo betonovaného rámového mostu), vzniknou účinkem dotvarování od předpětí hodnoty

$$\Delta M_{p\check{r}}(t_0)\left(1 - \frac{\alpha_0}{\bar{\varphi}(\infty)}\right)(1 - \mathrm{e}^{-\bar{\varphi}(t)}), \tag{6.37b}$$

kde $\Delta M_{p\check{r}}(t_0)$ jsou staticky neurčité momenty od předpětí, vypočtené pro předpínací síly v čase t_0 při zmonolitnění, jako kdyby byla předpínána definitivní staticky neurčitá konstrukce.

Dále je třeba upozornit na to, že značné změny staticky neurčitých momentů od předpětí může způsobit, zesílí-li se dodatečně některé průřezy přidanými částmi průřezu (posune se neutrální osa a změní se excentricita předpětí) — např. když se na prefabrikované nosníky dodatečně vybetonuje horní deska.

6.8. Výpočet spolupůsobení přibližnými metodami

Nejvýhodnější způsob řešení konstrukce se složenými průřezy je některá přibližná metoda podle odst. 5.3, 5.4 5.12 ap.

U konstrukcí ze složených prutů je třeba za základní vnitřní síly S uvažovat vnitřní síly M_1, N_1, M_2, N_2 v jednotlivých částech průřezů (na rozdíl od M, N pro celý průřez u homogenních průřezů). Vnitřní síly $\bar{S} + \overline{\bar{S}}$, vyvolané na dané pružné konstrukci vnitřními deformacemi $\bar{D}'_S = D'_S + D'_{im_S}$,

se vypočtou podle odst. 5.6. Deformace D'_S zde jsou $\varkappa_1 M_1/E_1J_1$, $\varkappa_2 N_2/E_2F_2$, ... $\varkappa_1\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, ...; vnitřní síly $\tilde{S}$ jsou $-\varkappa_1 M_1$, $-\varkappa_1 N_1$, ..., $-E_1F_1\varkappa_1\varepsilon_{sm}(\infty)/$ $/\varphi(\infty)$, ... Sečtením jejich účinků lze určit $\partial^2\tilde{w}'/\partial x^2 = -[\varkappa_1(M_1 + e_1N_1) +$ $+ \varkappa_2(M_2 + e_2N_2) + (e_1E_1F_1\varkappa_1 + e_2E_2F_2\varkappa_2)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)]/E_nJ_n$, $\tilde{\varepsilon}' = -[\varkappa_1N_1 +$ $+ \varkappa_2N_2 + (E_1F_1\varkappa_1 + E_2F_2\varkappa_2)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)]/E_nF_n$, odkud podle vztahů $\partial^2\tilde{w}'/\partial x^2 = -\tilde{M}/E_nJ_n$, $\tilde{\varepsilon}' = \tilde{N}/E_nF_n$ plyne

$$\tilde{M} = -\varkappa_1(M_1 + e_1N_1) - \varkappa_2(M_2 + e_2N_2) - (e_1E_1F_1\varkappa_1 + e_2E_2F_2\varkappa_2)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty), \tag{6.38}$$

$$\tilde{N} = -\varkappa_1N_1 - \varkappa_2N_2 - (E_1F_1\varkappa_1 + E_2F_2\varkappa_2)\,\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty).$$

Odpovídající zatížení $\tilde{q}$ napříč a $\tilde{n}$ podél prutů konstrukce je [srovnej (5.9), (5.10)]

$$\tilde{q} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\tilde{M}, \quad \tilde{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{N}, \tag{6.39}$$

k němuž je nutno připojit zatížení konců prutu momenty $\tilde{M}$, normálnými silami $\tilde{N}$ a posouvajícími silami $\tilde{T} = \mathrm{d}\tilde{M}/\mathrm{d}x$ a v bodech nespojité změny $\varkappa = \varkappa(x)$ z hodnoty $\varkappa_l$ na $\varkappa_p$ zatížení silami $\tilde{M}_p - \tilde{M}_l$, $\tilde{N}_p - \tilde{N}_l$, $\tilde{T}_p - \tilde{T}_l$. Účinek zatížení $\tilde{q}$ lze řešit silovou metodou nebo příčinkovými čarami (odst. 5.7). Při užití metody deformační, rozvodu deformace, metody Crossovy ap. (odst. 5.8) není třeba $\tilde{q}$ určovat.

Je-li zatížení M, N průřezu stálé (např. ve staticky určité konstrukci) nebo chceme-li řešit přibližně pouze samostatný průřez, nemá smyslu určovat $\tilde{q}$. Vyřeší se hodnoty $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{N}_2$ jako hodnoty vzniklé zatížením pružného složeného průřezu silami $M = -\tilde{M}$, $N = -\tilde{N}$. Účinek vnitřní deformace je dán vnitřními silami $\tilde{M}_1 + \overline{M}_1$, $\tilde{N}_1 + \overline{N}_1$, ... Dostáváme tedy jako speciální případ řešení samostatného průřezu přibližnou metodou (odst. 6.1). (Při řešení numerickou interpolační integrací zde místo řešení pružného průřezu s moduly E_i je nutno uvažovat průřez s moduly $\overline{E}_i$).

Dále vyšetřujeme izotropní vrstevnatou desku v pravoúhlých souřadnicích x, y za Kirchhoffova předpokladu kolmých normál. Pružnostní konstanty i-té vrstvy označme E_i, μ_i, $G_i = \frac{1}{2}E_i/(1 + \mu_i)$, $D_i = \frac{1}{12}E_id_i^3/(1 - \mu_i^2)$ a u transformované vrstvy $E'_i = E_i/\varkappa$, μ'_i, $G'_i = \frac{1}{2}E'_i(1 + \mu'_i)$, $D'_i = \frac{1}{12}E'_id_i^3/$ $/(1 - \mu_i'^2)$. Tloušťky vrstvy označme d_i, pořadnici jejího středu od těžiště pružného složeného průřezu $(E_1d_1, E_2d_2, \ldots)$ označme e_i $(\Sigma E_id_ie_i = 0)$; kladný smysl nechť je shora dolů. Pořadnice od těžiště složeného průřezu omezující vrstvu nechť jsou z_i, z_{i+1} $(z_{i+1} - z_i = d_i > 0$, $z_i = d_i - \frac{1}{2}e_i)$.

Jako vnitřní síly budeme uvažovat ohybové a kroutící momenty M_{x_i}, M_{y_i}, M_{xy_i}, v jednotlivých vrstvách a normálné síly a smykové síly N_{x_i}, N_{y_i}, N_{xy_i}. Podle podmínek rovnováhy musí platit $M_x = \sum_i (M_{x_i} +$ $+ e_iN_{x_i})$, $M_y = \ldots$, $M_{xy} = \sum_i (M_{xy_i} + e_iN_{xy_i})$, $N_x = \sum_i N_{x_i}$, $N_y = \ldots$, $N_{xy} = \sum_i N_{xy_i}$. Deformace $D'_S + D'_{sm_S}$ jsou po řadě

$$\tilde{w}'_{xx_i}{}^{*}) = \frac{12}{E'_id_i^3}(-M_{x_i} + \mu'_iM_{y_i}), \quad \tilde{w}'_{yy_i} = \frac{12}{E'_id_i^3}(-M_{y_i} + \mu'_iM_{x_i}),$$

$$\tilde{w}'_{xy_i} = -\frac{M_{xy}}{(1 - \mu'_i)\,D'_i}, \tag{6.40}$$

$$\tilde{\varepsilon}'_{x_i} = \frac{N_{x_i} - \mu'_iN_{y_i}}{E'_id_i} + \varkappa_i\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \quad \tilde{\varepsilon}'_{y_i} = \ldots,$$

$$\tilde{\gamma}'_{xy_i} = \frac{N_{xy_i}}{G'_id_i}.$$

Na dané pružné vrstvě jim odpovídají vnitřní síly

$$\tilde{M}_{x_i} = D_i(\tilde{w}'_{xx_i} + \mu\tilde{w}'_{yy_i}), \quad \tilde{M}_{y_i} = D_i(\tilde{w}'_{yy_i} + \mu\tilde{w}'_{xy_i}),$$

$$M_{xy_i} = D(1 - \mu)\,\tilde{w}_{xy_i}; \tag{6.41}$$

$$\tilde{N}_{x_i} = -\frac{E_id_i}{1 - \mu_i^2}(\tilde{\varepsilon}'_{x_i} + \mu\tilde{\varepsilon}'_{y_i}), \quad \tilde{N}'_{y_i} = -\frac{E_id_i}{1 - \mu_i^2}(\varepsilon'_{y_i} + \mu\tilde{\varepsilon}'_{x_i}),$$

$$\tilde{N}_{xy_i} = -G_id_i\tilde{\gamma}'_{xy_i}.$$

S těmito silami jsou ekvivalentní celkové vnitřní síly vrstevnaté desky

$$\tilde{M}_x = \sum_i (\tilde{M}_{x_i} + e_i\tilde{N}_{x_i}), \quad \tilde{M}_y = \ldots,$$

$$\tilde{M}_{xy} = \sum_i (\tilde{M}_{xy_i} + e_i\tilde{N}_{xy_i}), \tag{6.42}$$

$$\tilde{N}_x = \sum_i \tilde{N}_{x_i}, \quad \tilde{N}_y = \sum_i \tilde{N}_{y_i}, \quad \tilde{N}_{xy} = \sum_i \tilde{N}_{xy_i}.$$

K nim lze určit odpovídající zatížení dané pružné vrstevnaté desky

$$\tilde{p} = \frac{\partial^2\tilde{M}_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\tilde{M}_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\tilde{M}_y}{\partial y^2}, \tag{6.43}$$

jež je třeba doplnit zatížením okrajů odpovídajícími silami $\tilde{M}_x$, $\tilde{M}_y$, $\tilde{M}_{xy}$ a silami $\tilde{T}_x = \partial\tilde{M}_x/\partial x$, $\tilde{T}_y = \partial\tilde{M}_y/\partial y$, popřípadě též zatížením změnami všech

*) $\tilde{w}'_{xx_i} = \partial^2\tilde{w}'_i/\partial x^2$, což platí analogicky i pro podobné výrazy.

těchto sil na čarách nespojitosti $\varkappa_i = \varkappa_i(x, y)$. Je-li třeba řešit i stěnové působení této desky, je nutno uvažovat též zatížení silami $\tilde{p}_x = \partial\tilde{N}_x/\partial x + \partial\tilde{N}_{xy}/\partial y$, $\tilde{p}_y = \partial\tilde{N}_y/\partial y + \partial\tilde{N}_{xy}/\partial x$ v bodech uvnitř desky v její rovině a silami $\tilde{N}_x$, $\tilde{N}_y$, $\tilde{N}_{xy}$ na okrajích.

Poznámka. Ze známé ohybové plochy $w(x, y)$ se určí vnitřní síly $M_{x_i}, \ldots$ přes napětí podle vztahů $M_{x_i} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_x(z - e_i)\,\mathrm{d}z$, $M_{xy_i} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{xy}(z - e_i)\,\mathrm{d}z$, $N_{x_i} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_x\,\mathrm{d}z$, $N_{xy_i} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{xy}\,\mathrm{d}z$, ...

Obdrží se (podle [35], rov. (4.181), (4.186)) $M_{x_i} = -D_i(w_{xx} + \mu_i w_{yy})$, $M_{xy_i} = -D_i(1 - \mu_i)\,w_{xy}$, $N_{x_i} = -12D_i e_i(w_{xx} + \mu_i w_{yy})/d_i^2 = -e_i d_i E_i(w_{xx} + \mu_i w_{yy})/(1 - \mu_i^2)$, $N_{xy_i} = e_i d_i E_i w_{xy}/(1 + \mu_i)$, ...

Přibližně jako tento případ lze řešit i různé úlohy, kdy vrstva je nespojitá, jako je např. deska předpjatá kabely ve dvou kolmých směrech. Tu je nutno dosadit $\varkappa_a = 0$, $\mu_a = 0$, $e_a = 0$ pro výpočet $\tilde{w}_{xy}$, $M_{xy_a} = 0$, $M_{xy_b} = M_{xy}$, $T_{xy_a} = 0$, $T_{xy_b} = T_{xy}$, $d_a = f_{a_z}$, popř. f_{a_y} (plochy kabelů na jednotku délky), $e_a = e_{a_z}$, popř. e_{a_y} podle směru ohybu, přičemž se přibližně uvažuje těžiště průřezu v obou směrech stejné, a to uprostřed desky. Speciálním případem $f_{a_y} = 0$ je plošné působení desky předpjaté jedním směrem.

Příklad 6.8.1. Spojitý nosník složeného průřezu. Vypočteme odděleně vliv smršťování na spřaženém ocelobetonovém nosníku o stálém průřezu podle příkladu 6.2.1 a rozpětí 56 + 70 + 56 m (obr. 6.5). Předpokládejme přitom, že v betonové desce od veškerého zatížení nikde nevzniká tah, což je zajištěno předpětím desky nad podporami, takže nosník je po délce homogenní.

Poznámka. V praxi bychom pro úsporu řešili najednou vliv smršťování, vnějšího zatížení i předpětí. Kdybychom zjistili, že by v některé části vznikl tah, bylo by nutno tuto část desky neuvažovat.

Deska se vybetonuje na nosnících a předepne za 14 dní; $t_0 = 14$ dní, $\bar{\varphi}(\infty) = 2{,}30$. Výpočet provedeme numerickou interpolační integrací ve dvou dílcích, $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\,2{,}31 = 1{,}150$.

Napřed vypočteme $\Delta\varphi/(1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi) = 1{,}15/(1 + 0{,}575) = 0{,}730$, $\bar{E}_a F_a = 21{,}0 \cdot 10^5 \cdot 460/1 = 9670 \cdot 10^5$ kp, $\bar{E}_b F_b = 2{,}85 \cdot 10^5 \cdot 3600/1{,}575 = 6520 \cdot 10^5$ kp, $\tilde{e}_a = 129 \cdot 6520/(6520 + 9670) = 52{,}0$ cm, $\tilde{e}_b = -129 + 52 = -77{,}0$ cm.

První dílek $\Delta\varphi$. $\tilde{M}_a = \tilde{N}_a = \tilde{M}_b = 0$, $\tilde{N}_b = -(-3 \cdot 10^{-4}/4) \cdot 2{,}85 \cdot 10^5 \times 3600 \cdot 0{,}730 = 0{,}561 \cdot 10^5$ kp. Výslednice je $\tilde{M} = 0{,}561 \cdot 10^5(-77) = -43{,}2 \cdot 10^5$ kp cm, $\tilde{N} = 0{,}561 \cdot 10^5$ kp. Odpovídající zatížení je $\tilde{q} = 0$ a zatížení konců nosníku momentem $\tilde{M}$. Nyní řešíme spojitý nosník pro zatížení $-\tilde{M}$. Za staticky neurčité volíme momenty nad středními podporami M_A. Podle teorie pružnosti je $\delta_{AA} = (\frac{1}{3}\,0{,}8 + 0{,}5)\,L/\bar{E}_n J_n$, kde $L = 70$ m. Pro zatížení momentem $-\tilde{M}$ na koncích je $\delta_A = \frac{1}{6}(-\tilde{M})\,0{,}8L/\bar{E}_n J_n$. Odtud je $M_A = \delta_A/\delta_{AA} = -\frac{4}{23}\tilde{M}$.

Vnitřní síly v průřezu B na koncích pro zatížení $\bar{M}_B = -\tilde{M}$, $\bar{N}_B = -\tilde{N}$ jsou $\bar{M}_{a_B} = 43{,}2 \cdot 10^5 \cdot 4090/[4090 + 52^2 + (27 + 77^2)\,6520/9670] = 43{,}2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}379 = 16{,}35 \cdot 10^5$ kp cm, $\bar{N}_{a_B} = -0{,}561 \cdot 10^5/(1 + 0{,}675) + 16{,}35 \cdot 10^5 \cdot 52/4090 = -0{,}127 \cdot 10^5$ kp. Odtud konečné hodnoty v prvním dílku jsou $M^{(1)}_{a_B} = 16{,}35 \cdot 10^5$ kp cm, $N^{(1)}_{a_B} = -0{,}127 \cdot 10^5$ kp $= -N^{(1)}_{b_B}$, $M^{(1)}_{b_B} = 0$.

V průřezech A nad podporami je obdobně $\bar{M}_A = -\frac{4}{23}(-43{,}2 \cdot 10^5) = -7{,}52 \cdot 10^5$ kp cm, $\bar{N}_A = -\tilde{N}$; $\bar{M}_{a_A} = -7{,}52 \cdot 10^5 \cdot 0{,}379 = -2{,}85$ kp cm $= M^{(1)}_{a_A}$, $\bar{N}_{a_A} = -0{,}561 \cdot 10^5/1{,}675 - 2{,}85 \cdot 10^5 \cdot 52/4090 = -0{,}371 \cdot 10^5$ kp $= N^{(1)}_{a_A} = -N^{(1)}_{b_A}$, $M^{(1)}_{b_A} = 0$.

Druhý dílek. Na koncích je $\tilde{M}_{a_B} = \tilde{N}_{a_B} = 0$, $\tilde{M}_{b_B} = 0$, $\tilde{N}_{b_B} = (0{,}561 - 0{,}127 \cdot 0{,}730)\,10^5 = 0{,}468 \cdot 10^5$ kp $= \tilde{N}_B$, $\tilde{M}_B = 0{,}468 \cdot 10^5 - 77 = -36{,}0 \cdot 10^5$ kp cm. Nad podporami středními je $\tilde{M}_{a_A} = \tilde{N}_{a_A} = 0$, $\tilde{M}_{b_A} = 0$, $\tilde{N}_{b_A} = (0{,}561 - 0{,}371 \cdot 0{,}730)\,10^5 = 0{,}290 \cdot 10^5$ kp $= \tilde{N}_A$, $\tilde{M}_A = 0{,}290 \times 10^{-5}(-77) = -22{,}3 \cdot 10^5$ kp cm. Mezi podporami je průběh $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ přímkový, $\tilde{q} = 0$. Odpovídající zatížení je zatížení konců momenty $\tilde{M}_B$ plus svislými silami v A a B, jež se však celé přenáší do podpor. Vnitřní síly v průřezu B na koncích pro zatížení $\bar{M}_B = -\tilde{M}_B$, $\bar{N}_B = -\tilde{N}_B$ jsou $\bar{M}_{a_B} = 36{,}0 \times 10^5 \cdot 0{,}379 = 13{,}64 \cdot 10^5$ kp cm, $\tilde{N}_{a_B} = -0{,}468 \cdot 10^5/1{,}675 + 13{,}64 \times 10^5\,52/4090 = -0{,}107 \cdot 10^5$ kp, v průřezu A pro zatížení $\bar{M}_A = -\frac{4}{23}36{,}0 \times 10^5 = -6{,}26 \cdot 10^5$ kp cm, $\bar{N}_A = -\tilde{N}_A$ jsou $\bar{M}_{a_A} = -6{,}26 \cdot 10^5 \cdot 0{,}379 = -2{,}37$ kp cm, $\bar{N}_{a_A} = -0{,}290 \cdot 10^5/1{,}675 - 2{,}37 \cdot 10^5 \cdot 52/4090 = -0{,}203 \times 10^5$ kp.

Nyní již můžeme určit konečné celkové vnitřní síly v průřezech nad podporami $M_{A_\infty} = (-43{,}2 - 7{,}52 - 22{,}3 - 6{,}26)\,10^5 = -79{,}3 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{A_\infty} = M_{B_\infty} = N_{B_\infty} = 0$, svislou reakci nad středními podporami $A = 79{,}3 \cdot 10^5/5600 = 1415$ kp a vnitřní síly v částech průřezu nad středními podporami $M_{a_{A_\infty}} = (-2{,}85 - 2{,}37)\,10^5 = -5{,}22 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a_{A_\infty}} = (-0{,}371 - 0{,}203)\,10^5 = -0{,}574\ 10^5$ kp $= -N_{b_{A_\infty}}$, $M_{b_{A_\infty}} = 0$; $M_{a_{B_\infty}} = (16{,}35 + 13{,}64) \cdot 10^5 = 30{,}0 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{a_{B_\infty}} = (-0{,}127 - 0{,}107)\,10^5 = -0{,}234 \cdot 10^5$ kp $= -N_{b_{B_\infty}}$, $M_{b_{B_\infty}} = 0$. Kontrolou jsou podmínky rovnováhy v průřezech. Mezi podporami je průběh všech vnitřních sil přímkový.

Největší nebezpečné účinky v desce vznikají ve středním poli, v ocelovém nosníku nad středními podporami. Časový průběh vnitřních sil od vnějšího zatížení zavedeného na konstrukci jako celku (bez posuvu podpor a předpětí) bychom mohli řešit jako na samostatných průřezech, neboť konstrukce je po délce prutů homogenní, takže celkové vnitřní síly v průřezech lze vypočíst z vnějšího zatížení podle teorie pružnosti.

Poznámka. Koncový průřez je nezávislý na přetváření konstrukce jako celku. Kdybychom jej vyřešili přesně, obdrželi bychom $M_{a_{B\infty}} = 30{,}0 \cdot 10^5$ kp cm, $N_{b_{B\infty}} = -N_{a_{B\infty}} = 0{,}233 \cdot 10^5$ kp. Vidíme, že řešení interpolační integrací je při dvou dílcích prakticky přesné.

Podle odst. 6.8a můžeme též pro kontrolu přibližně vyřešit celkový moment $M_{A\infty}$, neboť $\lambda\overline{\varphi}(\infty) = -0{,}358$ je poměrně malé. Vypočte se $E_nJ_n = 21{,}0 \cdot 10^5 \cdot 460(4090 + 66{,}5^2) + 2{,}85 \cdot 10^5 \cdot 3600(27 + 62{,}5^2) = 1226 \cdot 10^{10}$ kp cm, $E_aJ_a = 395 \cdot 10^{10}$ kp cm, $-M_{sm}/E_nJ_n = 129 \cdot 10^5 \cdot 3600 \cdot (-3 \cdot 10^{-4}/4)/(1226 - 395)\,10^{10} = 1{,}195 \cdot 10^{-6}$ cm^{-1}. Pro deformaci základní soustavy ve smyslu M_A platí $\delta_{sm_A} = 1{,}195 \cdot 10^{-6}(\frac{1}{2}\,0{,}8 + 0{,}5)\,L$. Odtud plyne $M_{sm_{A_{el}}} = -\delta_{sm_A}/\delta_{AA} = -172 \cdot 10^5$ kp cm. Dále podle (6.33) je $\varphi_M(\infty, t_0) = (1226/395 - 1)(1 - e^{-0{,}358}) = 0{,}630$. Výsledek tedy je $M_A \doteq \doteq (1 - e^{-0{,}630}) \cdot (-172 \cdot 10^5) = -80{,}3 \cdot 10^5$ kp cm. Odchylka proti předcházejícímu řešení je pouze 1 % [takže vidíme, že zde skutečně přibližně lze uvažovat $\varphi_M(t, \tau) \doteq \varphi(t, o) - \varphi(\tau, o)$].

6.9. Ohyb železobetonových nosníků

Přesné řešení napětí v železobetonovém průřezu je značně složitější, poněvadž v tažené části průřezu až po neutrální osu vznikají trhliny, jejichž délka je časově proměnná [18], [36], [50], [10], [32a]. Přesný výpočet však zde není třeba prakticky provádět, neboť dotvarování mění rozdělení vnitřních sil jen velmi málo. Vzhledem k existenci trhlin totiž posun výslednice tlaku, velký vůči výšce tlačené oblasti, způsobuje jen malou poměrnou změnu ramene vnitřních sil. Již v prvé době užívání železového betonu byl zaveden vhodný přibližný způsob výpočtu napětí. Normami je předepisován jistý poměr ideálních přetvárných modulů pro různé druhy oceli a betonu (v ČSN např. $n = 15$), pro nějž se průřez řeší jako podle teorie pružnosti za vyloučeného tahu [32].

K přibližnému vyjádření ohybové deformace lze využít toho, že neutrální osa průřezu má přibližně stálou polohu [18]. Pro ohybovou deformaci se $\delta'_M(t)$, definované před rov. (6.25), pokusíme vyjádřit ve tvaru

$$\delta'_M = \frac{M\varkappa_M}{E_nJ_n} \doteq \frac{M\varkappa_M}{E_bJ_b}; \tag{6.44}$$

$\varkappa_M$ je náhradní koeficient afinity pro ohyb celého průřezu. Pružná ohybová deformace průřezu se rovná $(\nu_a/E_a - \nu_b/E_b)/r$, kde ν_b značí napětí v těžišti tlaku ($\nu_b < 0$) a ν_a napětí výztuže tahové ($\nu_a > 0$), r rameno vnitřních sil. Protože pružné ohybové deformace železobetonových nosníků lze přibližně počítat podle tuhostí E_nJ_n plného průřezu bez trhlin (nebo i přibližněji z tuhostí E_bJ_b) — viz např. [32], str. 318 — platí $M/E_nJ_n \doteq (\nu_a/E_a - \nu_b/E_b)/r$. Zanedbá-li se tlačená výztuž, je deformace od dotvarování dána poměrem $\delta'_M = (-\nu_b/E_b)/r$. Dosazením posledních dvou výrazů do (6.44) lze vypočíst (e_a je vzdálenost tahové výztuže od neutrální osy):

$$\varkappa_M \doteq \frac{1}{1 - \dfrac{\nu_a}{\nu_b}\dfrac{E_b}{E_a}} = 1 - \frac{e_a}{r}. \tag{6.45}$$

Poznámka: Tentýž výsledek bychom dostali přímo zavedením napětí do vzorce (6.36), kde platí $M = \nu_aF_ar$, $M_b + e_bN_b = M - \nu_aF_ae_a$, $\varkappa_b = 1$, $\varkappa_a = 0$.

Výpočet celé konstrukce lze provést podle odst. 4. Hodnotu $\varkappa_M$ lze přibližně vypočíst předem z napětí odhadnutých nebo vypočtených podle klasické teorie. Přibližně lze též dosadit hodnotu $\frac{1}{4}$; hodnota $\varkappa_M$ se může měnit v rozmezí asi $\frac{1}{3}$ až $\frac{1}{10}$. Hodnoty modulu E_b pro výpočet krátkodobé ohybové deformace jsou udány např. ve [32] str. 318. (Pro beton 250 je $E_b = 200$ Mp/cm^2 ve srovnání s hodnotou 285 Mp/cm^2 pro deformace normálnou silou.)

Redukce dotvarování koeficientem $\varkappa_M$ způsobuje, že u železobetonových konstrukcí činí dlouhodobé průhyby jen asi 15 až 60 % průhybů krátkodobých (u předpjatých 100 až 200 %). Účinky posuvů podpor a rektifikací se u nich redukují mnohem méně než u konstrukcí předpjatých, jen asi o 15 až 45 % (u předpjatých o 60 až 95 %).

Poznámka. Jde-li o klasickou železobetonovou konstrukci stejného stáří nespolupůsobící s předpjatými částmi nebo s plně tlačenými sloupy (nebo mají-li deformace sloupů malý vliv), lze výhodněji uvažovat transformovanou konstrukci jako totožnou s danou konstrukcí pružnou ($\varkappa = 1$) a redukci provést přímo v součiniteli dotvarování, tj. místo součinitele dotvarování pro prostý beton uvažovat součinitel dotvarování $\varphi_M = \varkappa_M\varphi$.

Deformace od dotvarování účinkem centrické normálné síly jsou u železového betonu též redukovány výztuží, avšak velmi málo (je-li beton tlačen) a lze to přibližně zanedbat, tj. $E_n'F_n \doteq E_bF_b$. Pro deformace za centrického tahu je třeba uvažovat $\varkappa = 0$.

Poznámka. Z toho důvodu je — v přesném smyslu — železobetonová konstrukce ze sloupů a trámů nehomogenní.

Při kombinaci tlaku a ohybu, vzniká-li v průřezu tah a beton je až k neutrální ose přerušen trhlinou, platí opět vzorec (6.45). Nevzniká-li tah, platí vzorec (6.36a), $\varkappa_M \approx \varkappa_N \approx 1$.

7. Variační formulace

7.1. Princip minima komplementárního přetvárného odporu

V teorii pružnosti platí variační princip Castiglianův, který říká, že ze všech možných rovnovážných stavů napjatosti tělesa nastane ten, při němž je tzv. komplementární energie neboli potenciální energie $\Pi(S; 1/E, \mu/E)$ vnitřních sil S plus potenciální energie $-A(p, u)$ povrchových sil p při posunutích u minimální [13], [35], [48]. Variačně je extrém vyjádřen podmínkou $\delta(\Pi - A) = 0$, kde δ je variační znaménko. V případě smrštění ε_{sm} a změny teploty Θ pružného tělesa je třeba ještě připojit změnu potenciální energie $\Pi_{sm}(S; \varepsilon_{sm}) + \Pi_\Theta(S; \Theta)$ způsobenou smrštěními ε_{sm} a změnou teploty Θ. Pak je $\delta(\Pi + \Pi_{sm} + \Pi_\Theta - A) = 0$.

Variační princip pro dotvarování lze odvodit obdobným postupem jako variační princip v teorii pružnosti, tj. z principu virtuálních prací [35], nebo lépe užitím Gaussovy věty pro převod integrálu objemového na povrchový [13]. Můžeme jej však obdržet též přímo podle analogie dotvarování s pružností (odst. 3.5). Podle této analogie podmínce $\delta(\Pi + \Pi_{sm} + \Pi_\Theta - A) = 0$, kde $\Pi = \Pi(S;\ 1/E,\ \mu/E)$, $\Pi_{sm} = \Pi_{sm}(S;\ \varepsilon_{sm})$, $\Pi_\Theta = \Pi_\Theta(S;\ \Theta)$, $A = A(p, u)$ odpovídá podmínka

$$\delta\left[\Pi\left(S;\ \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^{-1},\ \frac{1}{E}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\mu'\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^{-1}\right) + \right.$$
$$\left. + \Pi_{sm}(S; \varepsilon_{sm}) + \Pi_\Theta(S; \Theta) - A(p, u)\right] = 0, \qquad (7.1)$$

v níž variace se vztahuje na hodnoty sil S. Poněvadž energie Π je lineárně závislá na $1/E$ a μ/E a $\delta\Pi\,(\mathrm{d}S/\mathrm{d}\varphi;\ 1/E,\ \mu/E) = 0$, apod., můžeme tuto rovnici

upravit na tvar

$$\delta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Pi(S;\,1/E,\,\mu/E)+\Pi(S;\,1/E',\,\mu'/E')+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Pi_{sm}(S;\,\varepsilon_{sm})+\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Pi_{\Theta}(S;\,\Theta)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}A(p,u)\right]=0. \tag{7.1a}$$

Označme nyní

$$\Phi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Pi+\Pi', \tag{7.2}$$

kde jako Π' zkráceně zapisujeme výraz $\Pi(S;\,1/E',\,\mu'/E')$. Výraz (7.2) nazveme přetvárným odporem vnitřních sil. Výraz Π, popř. Π' značí pružnou potenciální energii vnitřních sil $S(t)$ v čase t na daném pružném tělese (s konstantami $E,\,\mu$), popř. potenciální energii, jež by odpovídala silám $S(t)$ na transformovaném tělese (s konstantami $E',\,\mu'$). Π je pružná energie vnitřních sil, jež se uvolní v čase t.

Dále označme Π'_{sm} nebo Π'_{Θ} změnu potenciální energie vnitřních sil $S(t)$ způsobenou smrštěními $\mathrm{d}\varepsilon_{sm(\varkappa)}/\mathrm{d}\varphi=\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ nebo dilatacemi od změn teploty $\mathrm{d}\Theta(t)/\mathrm{d}\varphi$. Je rovna virtuální práci sil $S(t)$ na deformaci $\varkappa\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, popř. $\alpha(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}\varphi)$. Jako $L=\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ označme výkon povrchových sil na rychlostech posunutí $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ v čase t. Vzhledem k tomu, že výrazy Π_{sm} a Π_{Θ} v (7.1a) jsou lineárně závislé na ε_{sm} a Θ a že $\delta\Pi_{sm}(\mathrm{d}S/\mathrm{d}\varphi;\,\varepsilon_{sm})=0$, $\delta\Pi_{\Theta}(\mathrm{d}S/\mathrm{d}\varphi;\,\Theta)=0$, můžeme místo $\mathrm{d}\Pi_{sm}/\mathrm{d}\varphi$ psát Π'_{sm} a místo $\mathrm{d}\Pi_{\Theta}/\mathrm{d}\varphi$ psát Π'_{Θ}. Rovnice (7.1a) můžeme nyní zapsat ve tvaru

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Pi+\Pi'+\Pi'_{sm}+\Pi_{\Theta}-L/\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)=\delta\Phi_k=0, \tag{7.3}$$

kde výraz v závorce jsme označili jako Φ_k. Nazveme jej komplementárním přetvárným odporem. Rovnice (7.3) vyjadřuje, že Φ_k má lokální extrém. Poněvadž stejnou záměnu konstant bychom mohli provést i v podmínce $\delta^2(\Pi+\Pi_{sm}+\Pi_{\Theta}-A)>0$, vyjadřující v teorii pružnosti minimum komplementární energie, platí, že výraz Φ_k nabývá minima.

Tento výsledek můžeme shrnout v princip minima komplementárního přetvárného odporu, který zní:

Ze všech možných rovnovážných změn napjatosti tělesa (konstrukce, systému) v čase t nastane ta, pro kterou je komplementární přetvárný odpor Φ_k minimem. Nahrazuje podmínky kompatatibility neboli spojitosti tělesa (konstrukce) a jeho vazeb a obsahuje též přetvárné rovnice.

Variačně je extrém vyjádřen vztahem (7.3), přičemž variace se vztahuje na síly vázané podmínkami rovnováhy. Variace δL je nenulová jen v těch částech povrchu, kde nejsou dány povrchové síly, tj. v místech, kde jsou dány nenulové změny posuvů (pootočení) podpor v čase t. Rovná se výkonu neznámých reakcí podpor na daných rychlostech posuvů. Neprobíhají-li časové posuvy podpor, je $\delta L=0$. Neprobíhá-li smršťování a tepelné dilatace nebo neuvažujeme-li je, platí $\delta\Pi'_{sm}=\delta\Pi'_{\Theta}=0$, $\Phi_k=\Phi$. Princip se pak redukuje na podmínku minima přetvárného odporu vnitřních sil.

Výše uvedený princip lze psát též v integrálním tvaru zahrnujícím i řešení počátečního pružného stavu. Obdržíme jej integrací (7.3) od 0 do $\bar{\varphi}(t)$, tj.

$$\delta\int_{t_0}^{t}\Phi_k\,\mathrm{d}\varphi(\tau)=\delta\left[\Pi+\int_{t_0}^{t}(\Pi'+\Pi'_{sm}+\Pi'_{\Theta})\,\mathrm{d}\varphi(\tau)-A\right]=0. \tag{7.3a}$$

Castiglianův princip je speciálním případem uvedeného principu a vyplývá ze (7.3a), položí-li se $\Pi'=0$.

Z principu plyne též přímo partikulární řešení pro ustálené dotvarování. Dosazením $\partial\Pi/\partial\varphi=0$ přechází totiž (7.3) v podmínku vyjadřující pružné řešení transformovaného tělesa.

Uvažujeme-li pouze vliv stálého zatížení zavedeného v čase t_0, je hodnota Π v čase t_0 absolutně minimální z hodnot $\Pi(t)$ a v jistém intervalu $t_0\leqq t\leqq t_0$ musí stále vzrůstat. Naopak Π' je minimální pro teoretický případ $\varphi\to\infty$.

U tělesa lze výraz Φ_k rozepsat ve tvaru

$$\Phi+\Pi'_{sm}+\Pi'_{\Theta}=\int_0\int_0\int_0\left\{\frac{1}{2E}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\mu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\right.\right.$$
$$+\sigma_z\sigma_x)+2(1+\mu)(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\Big]+\frac{1}{2E'}\Big[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-$$
$$-2\mu'(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)+2(1+\mu')\,(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\Big]+$$
$$\left.+(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\left(\varkappa\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}+\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{7.4}$$

V rovinné úloze se tento výraz zjednoduší zavedením funkce napětí $F(x,\,y,\,t)$ podle odst. 3.6, jsou-li objemové síly konstantní a nevznikají-li časové posuvy podpor. Vyjádříme-li v (7.4) napětí pomocí F a položíme-li $\mu=\mu'=0$, což lze provést, neboť podle odst. 3.6 řešení nezávisí na μ a μ', obdržíme (napětí na povrchu jsou dána)

$$\Phi + \Pi'_{sm} + \Pi'_\Theta = \int_o \int \left[\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varkappa \right) \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 \right) + \nabla^2 F \left(\varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \qquad (7.4a)$$

U konstrukce z prutů za Navierova předpokladu platí

$$\Phi + \Pi'_{sm} + \Pi'_\Theta = \int_o \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{M^2}{EJ} + \frac{N^2}{EF} + \frac{T^2}{GF_0} + \frac{K^2}{GJ_k} + \dots \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{E'J} + \frac{N^2}{E'F} + \dots \right) + N \left(\varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \right] \mathrm{d}x. \qquad (7.5)$$

Pro desku při Kirchhoffově hypotéze je

$$\Phi = \int_o \int \left[\frac{1}{2D(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_x^2 + M_y^2 - 2\mu M_x M_y + 2(1+\mu) M_{xy}^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2D'(1-\mu'^2)} (M_x^2 + M_y^2 - 2\mu' M_x M_y + 2(1+\mu') M_{xy}^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \qquad (7.6)$$

Pomocí přetvárného odporu lze vyjádřit deformaci $\delta_X(t)$ tělesa ve smyslu dané statické veličiny X. Považujme Φ_k za funkci statické veličiny X. Poněvadž v teorii pružnosti platí $\partial(\Pi - A)/\partial x = \delta_X$ (nebo při neposuvných podporách $\partial \Pi / \partial X = \delta_X$), plyne podle analogie dotvarování s pružností

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial X} = \frac{\partial \delta_X}{\partial \varphi}. \qquad (7.7)$$

Derivujme dále výraz Φ_k člen po členu podle X. Do vzniklého výrazu podle teorie pružnosti dosaďme $\partial(\Pi - A)/\partial X + \partial \Pi'_\Theta / \partial X = \delta_{elx}(t)$, $\partial \Pi' / \partial X = \delta'_X(t)$, $\partial \Pi'_{sm} / \partial X = \delta'_{sm_X}$, kde výrazy $\delta_{elx}(t), \dots$ jsou definovány v odst. 4.2. Obdržíme pak vzhledem k (7.7) vztah (4.5) pro deformaci, dříve odvozený přímou cestou. Platí nejen pro konstrukce, ale pro každé těleso.

Přímým důsledkem vzorce (7.7) jsou vztahy pro poměrné deformace

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \varphi}, \dots. \qquad (7.7a)$$

nebo u konstrukce pro zakřivení

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (7.7b)$$

atd., odpovídající tomu, že funkce Φ_k je potenciálem a $\mathrm{d}\Phi_k$ úplným diferenciálem.

Z principu minima komplementárného přetvárného odporu lze snadno odvodit přetvárné rovnice (podmínky souvislosti) staticky neurčité konstrukce. Nutná a postačující podmínka lokálního extrému funkce Φ_k zde zní

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \qquad (7.8)$$

(U konstrukce s nehomogenními průřezy to však není postačující podmínka, neboť staticky neurčité je i rozdělení vnitřních sil v průřezech.) Tyto podmínky plynou jinak též přímo ze (7.7) jako podmínky souvislosti konstrukce. Provedeme-li ve výrazu (7.5) parciální derivace a dosadíme-li podle (4.6) $\partial M / \partial X_i = \overline{M}_i$, obdržíme, neuvažujíce časové posuvy podpor

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial X_i} = \int_o \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{M \overline{M}_i}{EJ} + \frac{N \overline{N}_i}{EF} + \dots \right) \mathrm{d}x + \int_{o'} \left(\frac{M \overline{M}_i}{E'J} + \dots \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{o'} N_i \left(\varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \mathrm{d}x. \qquad (7.9)$$

Dosadí-li se za $M(t)$, $N(t)$, ... podle (4.6), vyjde

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial X_i} = \int_o \left(\frac{\overline{M}_i}{EJ} \sum_j \overline{M}_j \frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}\varphi} + \dots \right) \mathrm{d}x + \int_o \left(\frac{\overline{M}_i}{EJ} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi} + \dots \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_o \left(\frac{\overline{M}_i}{E'J} \sum_j \overline{M}_j X_j + \dots \right) \mathrm{d}x + \int_o \left(\frac{\overline{M}_i}{E'J} \mathfrak{M} + \dots \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_o \overline{N}_i \left(\varkappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \mathrm{d}x = \sum_j \frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}\varphi} \int_o \left(\frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EJ} + \dots \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_j X_j \int_o \left(\frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{E'J} + \dots \right) \mathrm{d}x + \delta'_i + \frac{\mathrm{d}\delta_i}{\mathrm{d}\varphi} + \delta'_{sm_i}. \qquad (7.9a)$$

Poslední systém rovnic je vzhledem ke vztahům (4.6) totožný se systémem (4.9). Provedené úpravy mají též zpětnou platnost, takže ze systému rovnic (4.9) vyplývá naopak zpětně lokální extrém funkce $\Phi_k(t)$ pro konstrukci. Aby bylo tímto postupem také dokázáno, že jde o lokální minimum, bylo by nutno dále odvodit, že platí $\partial^2 \Phi_k / \partial X_i^2 > 0$.

7.2. Princip minima celkového přetvárného odporu

Tento princip je analogií Lagrangeova principu minima celkové potenciální energie v teorii pružnosti. Pro jeho odvození platí podobné postupy jako v předešlém odstavci, a vyslovíme proto rovnou jeho znění:

Ze všech přetvárně možných změn deformace tělesa v čase t (změn vyhovujících podmínkám kompatibility neboli spojitosti tělesa a jeho vazeb) nastane ta, pro kterou je celkový přetvárný odpor minimem. Tento princip nahrazuje podmínky rovnováhy a obsahuje též přetvárné rovnice.

Celkový přetvárný odpor Φ_c je dán opět výrazem (7.3), avšak v závislosti nikoli na vnitřních silách, ale na deformacích D, tj. $\Pi = \Pi(D; 1/E, \mu/E)$ atd. Extrém je variačně vyjádřen opět podmínkou v (7.3), přičemž však variace se vztahuje na deformace vázané podmínkami kompatibility. Hodnota L se zde však týká navíc též objemových sil (což v předcházejícím odstavci odpadlo, poněvadž objemové síly jsou vždy dány předem; zde to neodpadá, neboť jde o variaci nikoli sil, ale deformací). Variace δL je rovna nule v místech podpor, kde deformace je předem dána, a v místech, kde zatížení je nulové. Zanedbáme-li objemové síly, týká se δL jen povrchového zatížení.

K vyjádření Φ_c pomocí deformace je nutno vyřešit diferenciální přetvárné rovnice vzhledem k napětí a dosadit do (7.2). U desky jde např. o řešení soustavy dvou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. U konstrukce z prutů po vyřešení M z rov. (4.2) dostaneme při uvažování pouze ohybové deformace ($\Theta = 0$):

$$\Phi_c = \int_0 \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varkappa \right) \left(\frac{\partial^2 w(t_0)}{\partial x^2} + \mathrm{e}^{-\varkappa \varphi} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\varkappa \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x^2} \, \mathrm{d}\varphi \right)^2 \mathrm{d}x - \int_0 p \frac{\partial w}{\partial \varphi} \, \mathrm{d}x. \tag{7.10}$$

7.3. Energetické vztahy

Důsledkem zákona o zachování mechanické energie je rovnost výkonu vnějších sil a výkonu vnitřních sil v daném čase. Tento výkon označme L. Výkon vnitřních sil je definován výrazem $\iiint_0 (\sigma_x \partial \varepsilon_x / \partial t + \ldots + \tau_{zx} \partial \gamma_{zx} / \partial t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$. Vyjádříme-li L pomocí přetvárných rovnic (3.3) ve vnitřních silách, zjistíme po úpravách, že platí

$$L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \Pi + 2\Pi' + \Pi'_{sm} + \Pi'_{\Theta} \right) \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{7.11}$$

Jestliže ve speciálním případě jde o řešení tělesa, na němž není dáno žádné zatížení a podpory jsou časově neposuvné (relaxace napětí při posuvu podpor, vliv smršťování a změn teploty), je $L = 0$ čili

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \Pi + 2\Pi' + \Pi'_{sm} + \Pi'_{\Theta} = 0. \tag{7.12}$$

Z této rovnice je též možno vyjít při řešení uvedených případů. Dále je odtud též vidět, že po náhlém posuvu podpor Π postupně klesá, neboť $\Pi' > 0$ a že při smršťování nebo monotonní proměně teploty Π postupně roste, neboť zde je $\Pi'_{sm} < 0$, $\Pi'_{\Theta} < 0$.

Část výkonu L vnějších nebo vnitřních sil způsobuje změnu pružné potenciální energie Π vnitřních sil a zbývající část se spotřebuje na dotvarování, rozptýlí se. Tento rozptýlený výkon je roven $L - \mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}t = (2\Pi' + \Pi'_{sm} + \Pi'_{\Theta}) (\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)$. Energie rozptýlená od času t_0 do t je rovna $\int_{t_0}^{t} (2\Pi' + \Pi'_{sm} + \Pi'_{\Theta}) \, \mathrm{d}\varphi(\tau)$.

7.4. Přibližná variační řešení

K přibližnému variačnímu řešení je nutno sestavit jedinou výslednou diferenciální rovnici úlohy. Při řešení rovinné úlohy je to např. rov. (3.10) pro funkci napětí, při řešení prutu je to rov. (4.2a) pro průhyb apod. Řešíme-li však problém Ritzovou metodou, není nutno, podobně jako v teorii pružnosti, tuto diferenciální rovnici sestavovat a hledat odpovídající funkcionál, neboť je tento funkcionál již znám z předcházejících variačních principů. Je to buď komplementární, nebo celkový odpor podle toho, jsou-li neznámé buď napětí (funkce napětí), nebo deformace. Tak např. v rovinné úloze lze vyjít z funkcionálu (7.4a), při ohybu prutu z (7.5).

Řešení lze vždy rozložit na dva problémy méněrozměrné, a to problém v prostoru a problém v čase, a užít variační metody postupných aproximací nebo Kantorovičovy metody [38], neboť hranice řešené oblasti, obecně čtyřrozměrné v souřadnicích x, y, z, t, se skládá pouze z ploch v prostoru x, y, z, t při $t = \text{konst}$ a z přímek rovnoběžných s osou t.

Postup ukážeme na příkladě konstrukce z prutů. Užijeme-li např. Galerkinovu metodu, vyjdeme z diferenciální rovnice pro průhyb ($\varkappa$ = konst), tj. z rov. (4.2a), jež má tvar $L[w(x, t)] = 0$. Při variační metodě postupných aproximací položíme napřed $w^{(1)} = w_1(x) f_1(\varphi)$, kde w_1 zvolíme tak, aby vyhovovalo kinematickým i statickým okrajovým podmínkám. Z podmínky ortogonality $\int\int L(w^{(1)})\, w_1(x)\, dx\, d\varphi = 0$ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu pro $f_1(\varphi)$, již vyřešíme. Dále položíme $w^{(2)} = w_2(x) f_1(\varphi)$ a z podmínky $\int\int L(w^{(2)}) f_1(\varphi)\, dx\, d\varphi = 0$ dostaneme diferenciální rovnici pro $w_2(x)$ v prostorové souřadnici x. Dalším krokem by bylo $w^{(3)} = w_2(x) f_2(\varphi)$ atd.

U Kantorovičovy metody položíme $w^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} w_i(x) f_i(\varphi)$, kde $w_1, \ldots w_n$ je systém ortogonálních funkcí vyhovujících okrajovým podmínkám kinematickým i statickým. Z podmínek ortogonality $\int\int L(w^{(n)})\, w_i(x)\, dx\, dt = 0$ dostaneme po provedení integrace přes x vzhledem ke známým funkcím w_i systém diferenciálních rovnic tvaru (4.9) pro funkce $f_i(\varphi)$. Podobný by byl postup i při užití metody nejmenší kvadratické odchylky ap.

Užijeme-li Ritzovy metody, vyjdeme z minima funkcionálu (7.10). U variační metody postupných aproximací položíme napřed $w^{(1)} = w_1(x) f_1(\varphi)$, kde w_1 se zvolí tak, aby vyhovovalo kinematickým okrajovým podmínkám. Dosazením do (7.10) dostaneme z podmínky $\partial \Phi_c / \partial f_1 = 0$ diferenciální rovnici 1. řádu pro $f_1(\varphi)$. Dále položíme $w^{(2)} = w_2(x) f_1(\varphi)$. Po dosazení do (7.10) dostaneme diferenciální rovnici pro $w_2(x)$ v prostorové souřadnici x. Další krok je $w^{(3)} = w_2(x) f_2(\varphi)$ atd. U Kantorovičovy metody se položí $w^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} w_i(x) f_i(\varphi)$, kde $w_1, \ldots, w_n$ je systém ortogonálních funkcí vyhovujících kinematickým okrajovým podmínkám. Dosazením do (7.10) obdrží se z podmínek $\partial \Phi_c / \partial f_i = 0$ po integraci přes funkce $w_i(x)$ systém diferenciálních rovnic pro funkce $f_i(\varphi)$. Je-li třeba znát též $M(x, t)$, je nutno dále řešit rov. (4.2).

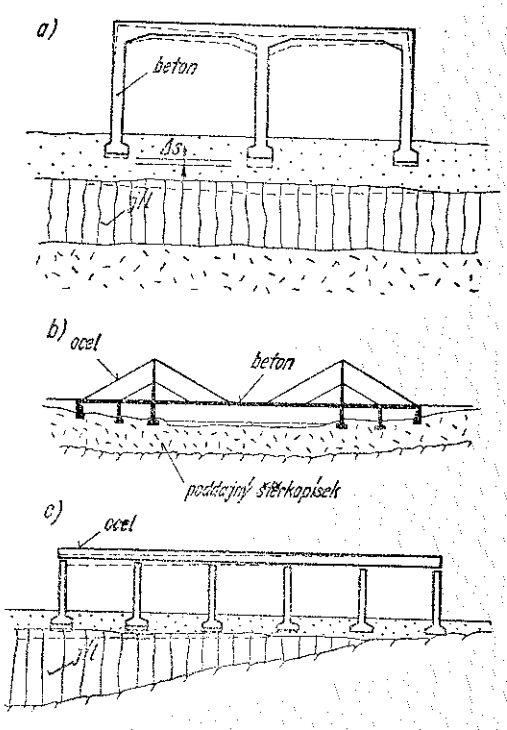
Při řešení málo nehomogenního tělesa lze přibližně hledat průběh napětí ve tvaru $\sigma_x(t) = \sigma_{x_0} + c(t)\,(\sigma_{x_p} - \sigma_{x_0})$, kde $c(t)$ je funkce stejná ve všech bodech tělesa a určí se z podmínky minima komplementárního přetvárného odporu.

Pro užití v praxi jsou však většinou vhodnější metody podle kap. 5 (kde lze popřípadě užít variační metody pro řešení pružného tělesa).

8. Spolupůsobení konstrukcí s podložím

Podloží stavebních konstrukcí často není tuhé, ale poddajné, takže tvoří dohromady s konstrukcí jednotný systém, v němž se vnitřní síly a deformace navzájem ovlivňují. Praktický význam tohoto jevu je značný, neboť často způsobuje závažná poškození konstrukcí. Projevuje se to např. při nerovnoměrném, tzv. diferenciálním sedání podpor staticky neurčité konstrukce, při bočních posuvech opěr rámů a oblouků vlivem vodorovné síly a při pootáčení patek účinkem momentů v částečném vetknutí (obr. 8.1a).

Vliv dotvarování konstrukce značně redukuje účinky sedání. Jestliže podloží je tvořeno jílem, je nutno zavést časový průběh deformace podloží. Pokud se podloží přetváří pouze krátkodobě, jako je tomu např. u písku a štěrku, lze užít řešení vyložené v předešlých kapitolách.



Obr. 8.1. **Některé případy spolupůsobení s dlouhodobým přetvářením**
a) v konstrukci i v podloží, b) pouze v konstrukci, c) pouze v podloží

Problémem spolupůsobení konstrukce a podloží v čase se zabýval Silveira [42], který řešil zvláštní případ, kdy vliv času se uplatňuje pouze v podloží tvořeném jílem, zatímco jedenkrát staticky neurčitá konstrukce je ideálně pružná bez dotvarování, např. ocelová konstrukce. Zmíněný případ vyřešil pro jednonásobnou statickou neurčitost časového působení (jediná podpora na jílu). Obecné řešení problémů spolupůsobení je podáno v autorově práci [9]. (Za obecnějších předpokladů řešil tyto problémy též Arutjunjan [1].)

K řešení spolupůsobení je třeba do přetvárných rovnic konstrukce zavést vliv deformace podloží. Popišme proto napřed stručně jeho přetváření.

8.1. Konečné hodnoty deformace podloží

Uvažujme nejprve konečné hodnoty deformace s_∞ podloží, která vznikne od daného zatížení P ve smyslu tohoto zatížení. U štěrku, písku ap. jsou to zároveň okamžité hodnoty deformace $s = s_\infty$, u jílu nikoli. Je několik způsobů výpočtu přetvoření.

Podle přesnějšího prvého způsobu se sedání s_∞ určuje integrací dílčích sedání přes výšku po jednotlivých vodorovných vrstvách, jejichž sedání se určuje s ohledem na roznášení zatížení, nejlépe podle čáry stlačitelnosti získané oedometrickou zkouškou na vzorcích zeminy. Tímto postupem lze též vyjádřit nehomogenní zvrstvení podloží. Čára sedání takto zjištěná není lineární, avšak pro výpočet spolupůsobení, popřípadě konzolidace je nutno ji linearizovat. Dále budeme proto uvažovat průměrný sečnový sklon K čáry deformace v oboru uvažovaných hodnot zatížení P čili vztah

$$s_\infty = K \,.\, P. \tag{8.1}$$

Pootočení základu od momentu, tj. od antimetrické složky zatížení, lze určovat z rozdílu sedání v rozích základu.

Podle druhého způsobu se sedání, pootočení a vodorovné posunutí určuje ze vzorců pro pružný poloprostor ve tvaru rov. (8.1), odvozených za předpokladu přímkové pružnosti zeminy, vyjádřené modulem deformace M (a Poissonovým číslem μ), a za předpokladu přibližně homogenního, tj. nevrstevnatého podloží. (U jílů M bývá 200 až 300 kp/cm², u písků 200 až 500 kp/cm², u štěrků 500 až 1500 kp/cm², u skalních hornin i přes 10^5 kp/cm²; μ bývá 0,25 až 0,5.)

Konstanta K deformace závisí podstatně na ulehlosti zeminy před zatížením. Při odlehčování nebo opakovaném zatěžování bývá konstanta K menší než při prvém zatěžování; přibližně lze ji předpokládat asi jako 5krát menší a modul M 5krát větší.

Pro výpočet spolupůsobení konstrukcí o více patkách je třeba vyjádřit závislost konečné hodnoty deformace $s_{\infty\beta}$ ve smyslu zatížení P_β na zatížení $P_{\beta'}$, kde β je index vztahující se na zatížení základu v různých patkách. Obdobně k rov. (8.1) platí obecnější vztah

$$s_{\infty\beta} = \sum_{\beta'} K_{\beta'\beta} P_{\beta'}, \tag{8.2}$$

kde konstanta $K_{\beta'\beta}$ ($K_{\beta'\beta} = K_{\beta\beta'}$) vyjadřuje konečnou deformaci ve smyslu zatížení P_β, vyvolanou zatížením $P_{\beta'} = 1$. V praxi lze většinou při nepříliš blízkých podporách vzájemné vlivy zanedbat a pro $\beta' \neq \beta$ položit $K_{\beta'\beta} \doteq 0$, což odpovídá rovnici (8.1).

8.2. Spolupůsobení při pružně poddajném podloží

U podloží tvořeného zeminami nesoudržnými, jako je písek, štěrk, štěrkopísek ap., nebo horninami skalními, vzniká konečná deformace prakticky okamžitě, čímž rozumíme dříve než asi za týden, což je doba vůči době dotvarování betonu zanedbatelná. Časový průběh deformace podloží lze považovat za speciální případ průběhu afinního k dotvarování betonu pro koeficient afinity podloží $\varkappa \doteq 0$. Řešení se proto provádí stejně jako v předešlých kapitolách, s tím jediným rozdílem, že v koeficientech δ_{ij}, δ_i je nutno zahrnout deformace základní statické soustavy ve smyslu veličiny X_i odpovídající deformacím podloží vyvolaným zatížením $\bar{X}_j = 1$. V koeficientech δ'_{ij}, δ'_i, δ'_{sm_i}, se vliv podloží nevyskytuje ($\varkappa \doteq 0$).

8.3. Časový průběh deformace jílu

U podloží tvořeného soudržnou zeminou, jako je např. jíl a částečně i silt, má průběh deformace vysloveně dlouhodobý charakter. V okamžiku zatížení jílové vrstvy nevznikne zprvu prakticky žádná deformace, neboť veškeré přitížení σ převezme voda v pórech (napětí neutrální u_w), jež je nestlačitelná. Zatížení ovšem předpokládáme menší než kritické (na mezi únosnosti). Postupným vytlačováním vody z pórů účinkem hydrostatického přetlaku u_w dochází k proudění vody do přilehlé propustné vrstvy, takže se

póry mohou postupně zmenšovat, napětí vody v pórech u_w se přesouvá do napětí mezi zrny σ' (napětí efektivní) a jílová vrstva se stlačuje.

Tento jev, zvaný konzolidace, teoreticky poprvé vyřešil r. 1923 Terzaghi [53] a řešení dále rozvinuli četní další badatelé. Teorie konzolidace je dnes za dále uvedených předpokladů pro různé zatěžovací stavy a způsoby odvodnění prakticky vyřešena, pouze však pro zatížení konstantní nebo pro předem daný průběh zatížení [23].

Řešení je založeno na lineárním Darcyho zákonu (linearita je někdy jen velmi přibližná) homogenního izotropního filtračního proudění ($v_{ef} = k\,\partial u_w/\partial s$), dále na předpokladu homogenní izotropní lineární závislosti deformace jílu na napětí σ' v uvažovaném oboru napětí a na předpokladu, že prostorové rozdělení celkového napětí σ, tj. součtu napětí neutrálného u_w a efektivního σ', je závislé na zatížení P a nezávislé na času. Matematicky řešení pak vede na lineární parciální diferenciální rovnici 2. řádu, která v případě pouze svislého proudění zní $\partial u_w/\partial t = C\partial^2 u_w/\partial z^2$, kde C značí koeficient konzolidace a z výškovou souřadnici. Řešením této rovnice se získají průběhy $u_w(t, z)$ neutrálního napětí po výšce vrstvy z ve zvoleném čase t, jež se nazývají izochrony. Poměr plochy omezené počáteční izochronou $u_w(0, z)$ a izochronou $u_w(t, z)$ v čase t k ploše omezené počáteční izochronou $u_w(0, z)$ a konečnou izochronou $u_w(\infty, z)$ udává tzv. stupeň konzolidace $U(t)$, jímž je dán průběh sedání jílové vrstvy $s(t)$:

$$s(t) = U(t)\, s_\infty = U(t)\, KP. \tag{8.3}$$

Hodnoty $U(t)$ jsou pro hlavní případy zatížení a odvodnění sestaveny v tabulkách a grafech [4], [23], [53] (obr. 8.2) v závislosti na tzv. časovém součiniteli T, tedy jako funkce $U = U(T)$. Pro netabulkované případy je nutno napřed řešit izochrony. Součinitel T je úměrný času t od zavedení zatížení P podle vztahu $T = (C/H^2)\, t$, kde H značí buď poloviční, nebo plnou výšku vrstvy podle způsobu odvodnění. Funkce $U(t)$ je stále rostoucí spojitá složená funkce času t, konkávní a se spojitou derivací. Pro $t = 0$ je $U(0) = 0$, pro $t \to \infty$ je $\lim U(t) = 1$.

Koeficient konzolidace C, vyjadřující vlastnosti jílu, je možno určit dvojím způsobem: Přesnější hodnoty se získají změřením průběhu sedání vzorku jílu v oedometru, při němž se stanoví, za jakou dobu t nastává jistý stupeň konzolidace U_1 (např. 60 % celkového stlačení). Potom je $C = H^2 T_1/t_1$, kde H_1 je poloviční výška vzorku v oedometru a T_1 časový součinitel odpovídající U_1 (podle tabulky). Bez oedometrické zkoušky lze koeficient C hrubě

stanovit ze vztahu $C = kM/\gamma_w$, kde M značí modul deformace jílu v oboru hodnot zatížení, k značí součinitel propustnosti jílu (bývá u jílů 10^{-6} až 10^{-11} cm/s). Vzhledem k předpokladu linearity zákona proudění i deformace (hodnoty k, M, C nezávislé na napětí) platí princip superpozice. Celková deformace nebo napětí v daném čase je součtem deformací nebo napětí od jednotlivých zatížení zavedených obecně v různých časech a v různých místech.

Platnost principu superpozice však není ve skutečnosti splněna v plném rozsahu. Vedle konzolidace jílu pod přírůstkem zatížení existuje totiž opačný jev — botnání jílu vlivem zmenšení zatížení (již zkonzolidovaného). Protože při botnání se jedná o odlehčení zeminy, platí pro něj značně větší modul přetvoření M a koeficient botnání je $C_b = kM'/\gamma_w$. Bývá přibližně pětkrát větší než C. Podle Terzaghiho je možno též přibližně uvažovat $C_b \to \infty$ [53]. Botnání vzniká v částečné oblasti jílové vrstvy i při některých rozděleních napětí od přitížení. Přibližné řešení těchto případů již bylo podáno [53], [23].

Při proměnném zatížení $P = P(t)$ je možno určit průběh sedání $s(t)$ jílové vrstvy podle principu superpozice (obr. 8.3), přičemž je však nutno předpokládat, že v žádné oblasti jílu nenastává botnání nebo jeho vliv je zanedbatelný. Pro spojitý průběh $P(t)$ platí

$$s(t) = \int_{t_z}^{t} U(t-\tau)\, \mathrm{d}s_\infty(\tau), \tag{8.4}$$

neboť $U(t-\tau)$ je stupeň konzolidace pro zatížení $\mathrm{d}P(\tau)$ (s odpovídající konečnou deformací $\mathrm{d}s_\infty(\tau) = K\,\mathrm{d}P(\tau)$ zavedeného v čase $\tau\,(\tau \leqq t)$. Čas t_z vyjadřuje okamžik zavedení prvého zatížení. Diferencováním tohoto vztahu (integrál závislý na parametru t) lze obdržet výraz pro rychlost deformace v čase t

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{t_z}^{t} \frac{\partial U(t-\tau)}{\partial t}\, \mathrm{d}s_\infty(\tau). \tag{8.5}$$

Rozdělíme-li čas na dílky $\Delta t^{(m)} = t^{(m)} - t^{(m-1)}$, $m = 1, 2, \ldots$, můžeme integrály přibližně nahradit sumacemi, čímž dostaneme vztahy

$$s^{(m)} = \sum_{r=0}^{m-1} U(t^{(m)} - t^{(r)})\, \Delta s_\infty^{(r)}, \tag{8.6}$$

$$\Delta s^{(m)} = \sum_{r=0}^{m-1} \Delta U^{(m,r)} \Delta s^{(r)}, \tag{8.7}$$

kde

$$\Delta U^{(m,r)} = U(t^{(m)} - t^{(r)}) - U(t^{(m-1)} - t^{(r)}). \tag{8.8}$$

Pro $\Delta t \to 0$ konvergují k přesnému řešení, takže zmenšováním dílků Δt je možno dosáhnout libovolné přesnosti. Zatížení je zde možno uvažovat i nespojitě proměnné. V rov. (8.6), (8.7) značí $\Delta s_\infty^{(r)}$, konečný přírůstek sedání odpovídající přírůstku zatížení zavedenému v čase $t^{(r)}$; $s^{(m)}$, popř. $\Delta s^{(m)}$ značí sedání v čase $t^{(m)}$, popř. přírůstek sedání v dílku $\Delta t^{(m)} = t^{(m)} - t^{(m-1)}$, $U^{(m,r)}$ stupeň konzolidace od času $t^{(r)}$ do času $t^{(m)}$ a $\Delta U^{(m,r)}$ jeho přírůstek v dílku $\Delta t^{(m)}$. Zatížení zavedené v průběhu dílku se vyjadřuje ve členu $\Delta s_\infty^{(r)}$, pro konec dílku a v průběhu dílku se zatížení přibližně podkládá za konstantní.

Rovnice (8.4) a (8.6) neplatí přesně, nastává-li v některé oblasti jílové vrstvy botnání, jež se kombinuje s konzolidací v ostatních částech jílové vrstvy. V obvyklých případech spolupůsobení podloží s konstrukcí bývá však botnání v poměru ke konzolidaci malé, takže můžeme přibližně přijmout rov. (8.4) a (8.6) i pro tyto případy (odpovídá to předpokladu $C_b \doteq C$). Při velkých odlehčeních může však vliv botnání převyšovat, takže je třeba stanovit pro přibližné použití rov. (8.5) a (8.6) jistou mez. Z názoru je zřejmé, že ji lze uvažovat jako mez, kdy začíná zvedání; omezující podmínka při výpočtu podle rov. (8.4) nebo (8.6) pak je

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t \geq 0 \qquad \text{nebo} \qquad \Delta s^{(m)} \geq 0, \tag{8.9}$$

což odpovídá stavu, kdy vliv botnání (za teoretického předpokladu $C_b = C$) je větší než vliv konzolidace. Pro velká odlehčení, při nichž je podmínka (8.9) překročena, můžeme přírůstky deformace přibližně určovat též z rov. (8.5) nebo (8.7), kde však je nutno místo $U(t)$ uvažovat stupeň botnání $U_b(t)$, jenž se určí s ohledem na koeficient botnání C_b. Je-li zatížení konstrukce stálé a působí-li již od počátku v definitivní statické soustavě, nemůže být mez zvedání, tj. podmínka (8.9), překročena.

Průběh sedání $s(t)$ při proměně zatížení je možno přibližně vyjádřit v jednodušším tvaru, než je výraz (8.5) nebo (8.6), využije-li se speciálních vlastností funkce $U(t)$. Přibližně platí afinita mezi křivkami $U(t)$ a $U(t-\tau)$ podle osy $U(\infty) = 1$ ($\tau > 0$), což lze vyjádřit vztahem

$$U(t-\tau) \doteq \frac{U(t) - U(\tau)}{1 - U(\tau)}. \tag{8.10}$$

Přesně by tento vztah platil jenom pro funkci $U(t)$ tvaru $1 - \mathrm{e}^{-bt}$, kde b je konstanta. Podle přibližného řešení parabolickými izochronami (jehož odchylka je většinou do 1 %, max. asi 4 % [53]) vychází $U(t) = 1 - c\,\mathrm{e}^{-bt}$, kde pro $t = 0$ je $c = 1$ a počínaje jistou hodnotou $U_1 > 0$ je c a b konstantní a c je blízké k 1 (např. pro čáru a na obr. 8.2 při $U \geq 1/3$ je $c = 0{,}86$, pro čáru b při $U \geq 1/3$ je $c = 1{,}10$). Dosazením různých hodnot $U(t)$ přesného řešení do rov. (8.10) lze se dále přesvědčit, že odchylky jsou většinou do 15 %, pro menší t (větší rychlost změn napjatosti) jsou ještě menší. S ohledem na četné zjednodušující předpoklady řešení lze se v praxi s touto přibližností spokojit.

Po dosazení rov. (8.10) do rov. (8.5) nebo (8.7) obdržíme pak jednodušší vztahy

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \doteq \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} \int_{t_z}^{t} \frac{\mathrm{d}s_\infty(\tau)}{1 - U(\tau)} = \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}\, \tilde{s}_\infty(t), \tag{8.11}$$

$$\Delta s^{(m)} \doteq \Delta U^{(m)} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\Delta s_\infty^{(r)}}{1 - U^{(r)}} = \Delta U^{(m)} \tilde{s}_\infty^{(m)}, \tag{8.12}$$

kde

$$\Delta U^{(m)} = U^{(m)} - U^{(m-1)}, \quad U^{(r)} = U(t^{(m)}). \tag{8.12a}$$

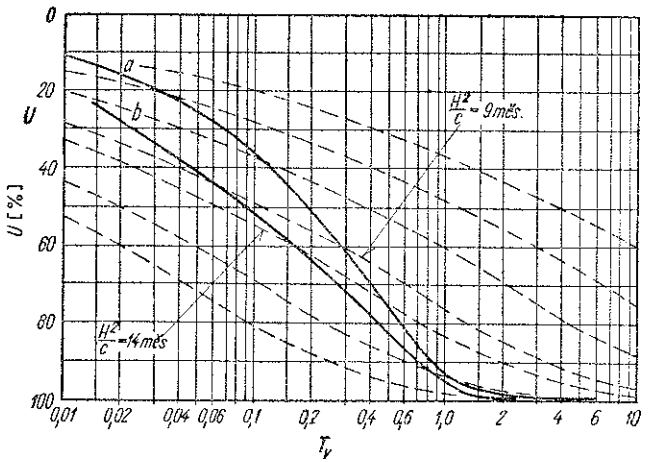
Počátek $t = 0$ času t je zde vhodné s ohledem na přesnost volit tak, aby vyjadřoval střední dobu zavedení zatížení na jíl. Okamžik t_z zavedení prvého zatížení pak je $t_z < 0$, a je tedy třeba zavést $U(t)$ též pro záporné hodnoty. Z předpokladu afinity mezi křivkami $U(t)$ a $U(t - t_z)$ plyne $1/[1 - U(-t)] \doteq 1 - U(t)$. Překročí-li se v času $t = t_b$ mez zvedání, daná podmínkou (8.9), je nutno pro $t > t_b$ dosazovat v těchto vztazích $U_b(t)$ místo $U(t)$.

Poznámka. Je též možno místo rov. (8.10) přesněji uvažovat vztah $U(t-\tau) \doteq c[U(t) - U(\tau)]/[1 - U(\tau)]$ odpovídající funkci $1 - c\,\mathrm{e}^{-bt}$, kde c by se uvažovalo konstantní střední hodnotou pro daný případ zatížení a odvodnění jílu. V rov. (8.11), (8.12) by pak místo $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$, $\Delta U^{(m)}$ bylo nutné psát $c\,\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$, $c\,\Delta U^{(m)}$.

Při výpočtu časového průběhu pootočení, popř. posunutí od působení svislé síly kombinované s momentem nebo s vodorovnou silou, lze u malých základů uvažovat krátkodobý průběh. Je to důsledkem jednak toho, že antimetrická složka zatížení ovlivňuje jen malou část pod základem, přičemž se zde uplatňuje převážně vodorovné proudění, pro něž často bývá propustnost jílu větší. Přesné řešení tohoto případu by bylo složité a zkomplikované též tím, že konzolidace je zde vždy kombinována s botnáním některé oblasti, přičemž obvykle dochází ke zvedání jednoho rohu základu.

8.4. Porovnání průběhu konzolidace jílu a dotvarování betonu

Konzolidace jílové vrstvy a dotvarování betonu jsou dva jevy různého charakteru. Dotvarování betonu je normou předpokládáno jako přetváření dlouhodobé, převážně nevratné (zpožděné plastické), zatímco konzolidace jílu je převážně zpožděným pružným přetvořením (ne však zcela vzhledem k většímu modulu M pro odlehčení). (Vedle konzolidace jílu, závislé na proudění vody, existují též jisté dlouhodobé plastické deformace na proudění nezávislé, podobně jako u betonu, které zanedbáváme.) Pružná deformace se u betonu objevuje okamžitě. V okamžiku zatížení jílové vrstvy nevzniká prakticky žádná deformace, okamžitá pružná deformace je nulová. Proto také časový průběh sedání jílové vrstvy se udává v poměru ke konečnému stlačení, kdežto deformace betonu v poměru k počátečnímu (okamžitému) pružnému přetvoření. Přetváření betonu v čase t (podle rov. 2.5) závisí pouze na stáří betonu a velikosti zatížení v čase t a nezávisí na jeho předchozím průběhu. Na rozdíl od toho však sedání jílové vrstvy v čase t závisí na celém předchozím časovém průběhu zatížení P. Složka konzolidace připadající na zatížení $\Delta P(\tau)$ zavedené v čase τ závisí pouze na době $t - \tau$, jež uplynula od zavedení tohoto zatížení, přičemž stáří jílu nerozhoduje a není ani přesně známou hodnotou.



Obr. 8.2. Průběh konzolidace jílu v porovnání s dotvarováním betonu (stálé zatížení)

K názornému porovnání časových průběhů deformace při konstantním zatížení je na obr. 8.2 uveden graf stupně konzolidace U jílové vrstvy v závislosti na časovém součiniteli T, tj. na veličině úměrné času t, pro dva jednoduché případy zatížení — čára a pro konstantní přitížení jílu po výšce vrstvy i ve všech vodorovných rovinách s odvodněním na horním i dolním povrchu vrstvy, čára b pro přitížení jílu klesající do hloubky podle trojúhelníka s odvodněním pouze na horním povrchu. Vyneseme-li normovou křivku dotvarování betonu $\varphi(t)/\varphi(\infty)$ [v poměru ke konečné hodnotě $\varphi(\infty)$] v závislosti na časovém součiniteli $T = (C/H^2)\,t$ místo na času t, tj. pro různé hodnoty násobné konstanty H^2/C, dostaneme křivky vyznačené na obr. 8.2 čárkovaně. Na první pohled vidíme, že tyto křivky nejsou afinní s průběhem konzolidace vyjma triviálního případu $H^2/C \to 0$, kde koeficient afinity je $\varkappa \to 0$.

Jen v jednom případě lze za přibližně stálého zatížení zhruba předpokládat afinitu průběhu dotvarování a konzolidace. Je to tehdy, když křivky $U(T)$ a $\varphi(TH^2/C)/\varphi(\infty)$ se protínají v bodě, v němž U dosahuje hodnoty asi 60 %, celkového sedání (60 % zvoleno podle názoru) nebo jinými slovy, dosáhne-li se 60 % konečné hodnoty plastického přetvoření u jílu přibližně za stejnou dobu jako u betonu, tj. asi za 2,4 měsíce. U křivky a to odpovídá násobné konstantě $H^2/C = 2{,}4/0{,}28 = 9$ měsíců, u křivky b konstantě $H^2/C = 2{,}4/0{,}17 = 14$ měsíců, což např. při koeficientu konzolidace $C = kM/\gamma_w = 10^{-8} \cdot 100/10^{-3}$ cm²/s $= 0{,}26$ m²/měs. odpovídá výšce vrstvy $2H \doteq 3{,}0$ m, popř. $H \doteq 1{,}9$ m. Tato tloušťka vrstvy konzolidující zhruba stejně rychle, jak probíhá dotvarování betonu, se však může měnit ve velmi širokých mezích s koeficientem propustnosti k a modulem stlačitelnosti M jílu (při hodnotách $k = 10^{-10}$ až 10^{-7} cm/s a $M = 50$ až 200 kp/cm² vychází $2H \doteq 0{,}21$ m až 13,4 m, popř. $H \doteq 0{,}14$ m až 8,6 m). Průběh konzolidace lze v tomto případě hrubě vystihnout křivkou úměrnou dotvarování betonu

$$s(t) \doteq s_\infty \overline{\varphi}(t)/\overline{\varphi}(\infty) \tag{8.13}$$

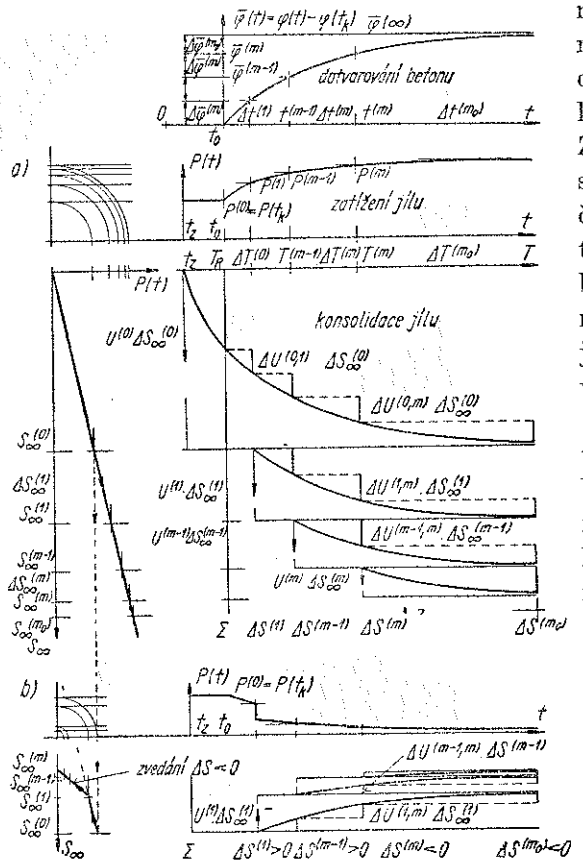
odpovídající koeficientu afinity dotvarování pro jíl $\varkappa \doteq 1/\overline{\varphi}(\infty)$.

8.5. Výpočet spolupůsobení při dlouhodobém přetváření v konstrukci i v podloží

Podle toho, v kterých složkách systému — konstrukce podloží se uplatňuje vliv času, můžeme rozlišit několik případů spolupůsobení (obr. 8.1). Nejobecnější je případ, vyznačuje-li se dlouhodobým přetvářením jak materiál konstrukce, tak materiál podloží (a). Speciální případy nastávají, vyznačuje-li se dlouhodobým přetvářením pouze materiál podloží (b) nebo pouze materiál konstrukce (c). Ze zemin se dlouhodobým přetvářením vyznačuje jíl, zatímco písek, štěrk, štěrkopísek a skála se prakticky dlouhodobě nepřetvářejí (po běžnou dobu užívání stavby). Případ (a) je reprezentován např. betonovou konstrukcí na jílovém podloží, případ (b) betonovou nebo ocelobetonovou

konstrukcí na štěrku, písku nebo skále, případ (c) ocelovou konstrukcí na jílu. Případu teorie pružnosti odpovídá ocelová konstrukce na štěrku, písku nebo skále.

Řešme napřed nejobecnější případ (a). Výpočet spolupůsobení staticky neurčité konstrukce betonové nebo ocelobetonové obecně nehomogenní z hlediska dotvarování a smršťování a podloží s jílovými vrstvami lze provést na základě řešení samostatné konstrukce podle předcházejících kapitol a řešení konzolidace podle odst. 8.3. Zvolí se základní statická soustava se staticky neurčitými veličinami X_i, a to tak, aby všechny její části byly buď staticky určité nebo i staticky neurčité, jsou-li homogenní a spočívají-li na podloží bez jílu.



Obr. 8.3. Znázornění numerické integrace při sedání jílu
a) rostoucí zatížení, b) klesající zatížení

Časový průběh staticky neurčitých veličin budeme řešit numerickou integrací (polygonální). Hodnotu součinitele dotvarování betonu $\bar{\varphi}(\infty)$ rozdělme na m_0 dílků $\Delta\bar{\varphi}^{(m)} = \bar{\varphi}^{(m)} - \bar{\varphi}^{(m-1)}$, jimž odpovídají hodnoty $\Delta t^{(m)} = t^{(m)} - t^{(m-1)}$, $\Delta T^{(m)} = (C/H^2)\,\Delta t^{(m)}$. Poslední časový dílek není ukončený, tj. $t^{(m_0)} \to \infty$ (obr. 8.3).

K sestavení přetvárných rovnic je třeba vyjádřit deformace za dobu $\Delta t^{(m)}$ ve smyslu staticky neurčitých X_i, odpovídající deformacím podloží. V koeficientech δ_{ij}, popř. $\Delta\delta_i$ se vedle pružných deformací konstrukce zahrnou okamžité deformace podloží ve smyslu staticky neurčitých veličin X_i na základní soustavě od zatížení $\bar{X}_i = 1$, popř. od přírůstku vnějšího zatížení za dobu $\Delta t^{(m)}$. Jsou to deformace pískových, štěrkových a skalních částí podloží. Deformace ve smyslu X_i odpovídající sednutí jílu za dobu $\Delta t^{(m)}$ vyjádříme ve zvláštních členech $\Delta\delta_{c_i}$.

V koeficientech δ'_{ij} a δ'_i budeme vyjadřovat pouze dlouhodobé plastické deformace systému, takže deformace podloží se v nich nevyskytují (pro písek, štěrk a skálu je $\varkappa \doteq 0$).

K vyjádření členu $\Delta\delta_{c_i}$ je třeba napřed vyjádřit jeho vztah s deformacemi ve smyslu zatížení P_β jílového podloží. Indexem β budeme označovat jednotlivé složky P_β zatížení jílového podloží (svislé síly, popř. též vodorovné, a momenty v jednotlivých patkách) a odpovídající jim deformace s_β (sedání, popř. též vodorovné posunutí a pootočení).

Vliv deformace s_β na deformaci základní soustavy ve smyslu síly X_i označme konstantou b_{β_i} a vliv síly X_i na zatížení podloží P_β ve smyslu s_β označme konstantou $b_{i\beta}$. Potom je

$$\Delta\delta_{c_i}^{(m)} = \sum_\beta b_{\beta_i}\Delta s_\beta^{(m)}, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{8.14}$$

$$\Delta P_\beta^{(m)} = \sum_i b_{i_\beta}\Delta X_i^{(m)} + \Delta P_{z_\beta}^{(m)}, \qquad (\beta = 1, \ldots, \beta_0) \tag{8.15}$$

kde $\Delta P_{z_\beta}^{(m)}$ značí přírůstek zatížení podloží na základní soustavě od přírůstků vnějšího zatížení za dobu $\Delta t^{(m)}$. Podle Maxwellovy věty platí $b_{\beta_i} = b_{i\beta}$ a matice $[b_{\beta_i}]$ a $[b_{i\beta}]$ jsou tedy navzájem transponované. Počtářsky je vhodné volit staticky neurčité X_i pokud možno totožné se silami P_β, neboť pak je $b_{\beta_i} = b_{i\beta} = 1$.

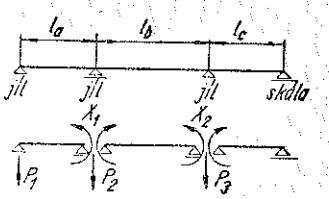
Příklad. U spojitého nosníku se stálým zatížením podle obr. 8.4 platí

$$\Delta\delta_{c_1} = \Delta s_1/l_a - \Delta s_2(1/l_a + 1/l_b) + \Delta s_3/l_b,$$
$$\Delta\delta_{c_2} = \Delta s_2/l_b - \Delta s_3(1/l_b + 1/l_c);$$
$$\Delta P_1 = \Delta X_1/l_a, \quad \Delta P_2 = -\Delta X_1(1/l_a + 1/l_b) + \Delta X_2/l_b,$$
$$\Delta X_3 = \Delta X_1/l_b - \Delta X_2(1/l_b + 1/l_c)$$

čili

$$[b_{\beta_i}] = \begin{bmatrix} 1/l_a, & -1/l_a - 1/l_b, & 1/l_b \\ 0 & 1/l_b & , \quad -1/l_b - 1/l_c \end{bmatrix},$$

$$[b_{i\beta}] = \begin{bmatrix} 1/l_a, & , & 0 \\ -1/l_a - 1/l_b, & & 1/l_b \\ 1/l_b, & -1/l_b - 1/l_c & \end{bmatrix}.$$



Obr. 8.4.

Nyní již můžeme zapsat přetvárné výminky staticky neurčité konstrukce pro časový dílek $\Delta t^{(m)}$. Podle (5.6) platí

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\Delta X_j^{(m)} + \Big(\sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j^{(m-1)} + \delta_i'^{(m-1)} + \delta'_{sm_i}\Big)\Delta\overline{\varphi}^{(m)} + \\ + \Delta\delta_i^{(m)} + \Delta\delta_{c_i}^{(m)} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8.16}$$

Při výpočtu se vyjde od daných počátečních hodnot $X_i(t_0)$, $P_\beta(t_0)$ v čase t_0 odpovídajícím začátku spolupůsobení konstrukce. Postup je znázorněn přehledně v tab. 8.1 (závorky [ ] značí čtvercovou nebo sloupcovou matici s indexy i, j nebo β', β, popř. obdélníkovou matici s indexy i, β). Pro praktické výpočty postačuje přesnost přibližného určení deformace jílu podle (8.12). V každém dílku je nutno ověřit splnění podmínky (8.9). Není-li splněna, je nutno výpočet $\Delta s_\beta^{(m)}$ opakovat pro změnu stupně konzolidace $\Delta U_\beta^{(m)}$ pro botnání a dále dosazovat konstanty $K_{\beta'\beta}$, δ_{ij}, δ_i pro odlehčování, pokud nebude podmínka (8.9) opět splněna. (V tomto případě má význam použít pouze přibližného vzorce, a to i ve všech následujících dílcích.)

Postup výpočtu numerickou integrací je vhodný pro užití samočinných počítačů.

Řešení komverguje pro $\Delta t^{(m)} \to 0$ k přesnému řešení, tj. zmenšováním dílků lze dosáhnout libovolné přesnosti.

Obecné řešení přesné lze formulovat v diferenciálním tvaru. Z rov. (8.16) plyne limitním přechodem pro $\Delta\overline{\varphi} \to 0$ systém n nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu pro funkce $X_i(t)$

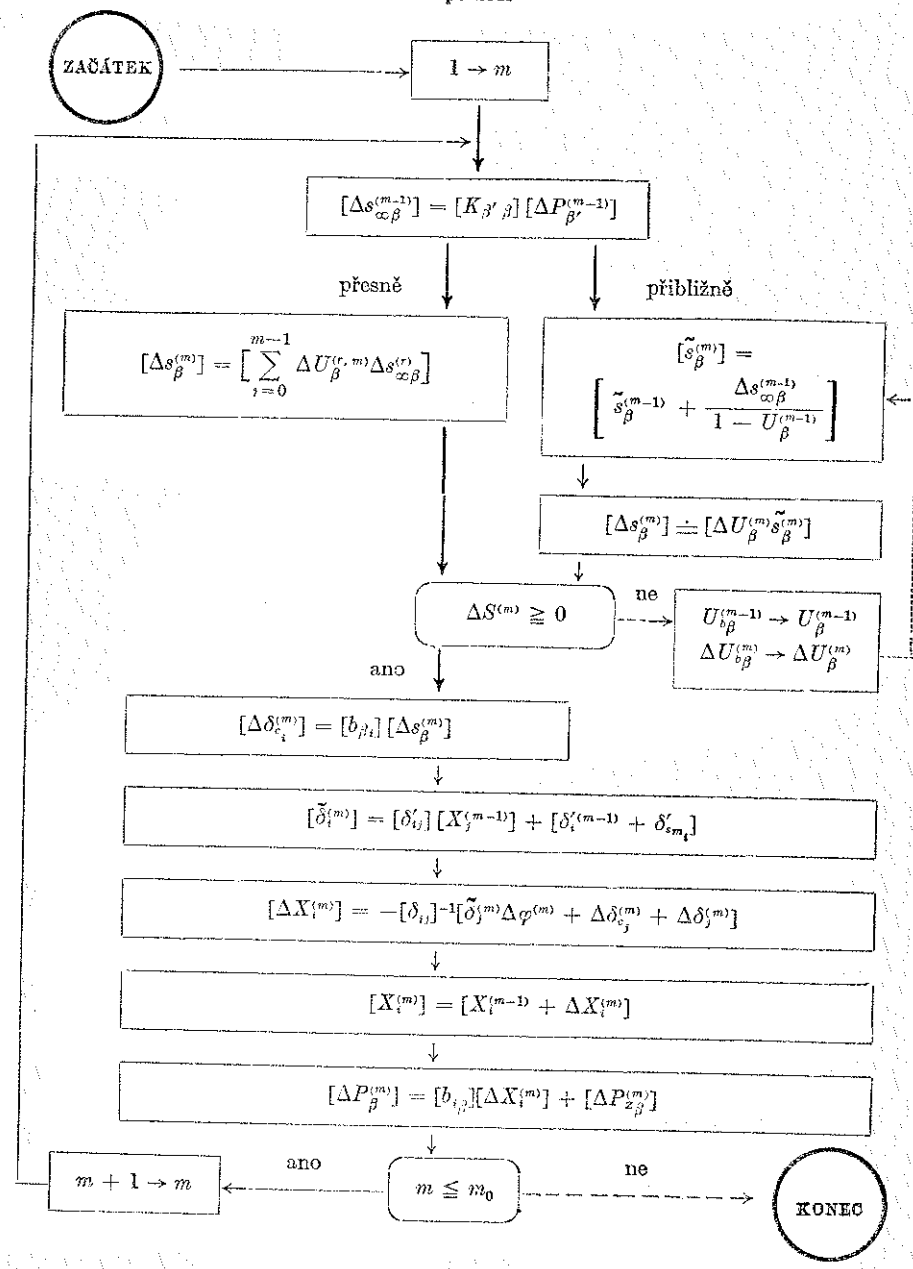
$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\frac{\mathrm{d}X_j(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \sum_{j=1}^{n} \delta'_{ij}X_j(t) + \delta'_i + \delta'_{sm_i} + \\ + \frac{\mathrm{d}\delta_i(t)}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\delta_{c_i}(t)}{\mathrm{d}\varphi} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{8.17}$$

kde podle rov. (8.2), (8.14), (8.15) a rov. (8.5) pro přesné řešení je

$$\frac{\mathrm{d}\delta_{c_i}(t)}{\mathrm{d}\overline{\varphi}_i} = \sum_\beta b_{\beta i}\Big[\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}U_\beta(t-\tau)}{\mathrm{d}\varphi(t)} \sum_{\beta'} K_{\beta'\beta}\Big(\sum_i b_{i\beta}\frac{\mathrm{d}X_i(\tau)}{\mathrm{d}\varphi(\tau)} + \\ + \frac{\mathrm{d}P_{z_\beta}}{\mathrm{d}\varphi(\tau)}\Big)\mathrm{d}\varphi(\tau)\Big], \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{8.17a}$$

takže se vlastně jedná o systém integrálně diferenciálních rovnic. Při užití přibližného vzorce (8.11) lze člen $\mathrm{d}\delta_{c_i}/\mathrm{d}\varphi$ vyjádřit ve tvaru

Tabulka 8.1. Blokové schéma pro výpočet spolupůsobení betonové konstrukce a jílového podloží



$$\frac{\mathrm{d}\delta_{c_i}(t)}{\mathrm{d}\varphi} \doteq \sum_\beta b_{\beta_i}\Big[\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}\varphi}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{1-U_\beta(\tau)}\sum_{\beta'}K_{\beta'\beta}\times$$

$$\times\Big(\sum_i b_{i\beta}\frac{\mathrm{d}X_i(\tau)}{\mathrm{d}\varphi(\tau)}+\frac{\mathrm{d}P_{z_\beta}}{\mathrm{d}\varphi(\tau)}\Big)\mathrm{d}\varphi(\tau)\Big]. \qquad (8.17b)$$

Integrováním rov. (8.17) přes $\mathrm{d}\varphi$ v mezích od $\overline{\varphi}=0$ do $\overline{\varphi}(t)$ a dosazením z rov. (8.2), (8,14), (8.15) a rov. (8.4) pro přesné řešení lze úlohu též převést na řešení systému integrálních rovnic (Volterrových)

$$(\delta_i'+\delta'_{sm_i})\,\overline{\varphi}(t)+\delta_i(t)-\delta_i(t_0)=-\sum_j\delta_{ij}[X_j(t)-X_j(t_0)]-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\sum_j\delta'_{ij}X_j(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau)-\int_{t_0}^{t}\sum_\beta\Big[b_{\beta_i}U(t-\tau)\sum_{\beta'}K_{\beta'\beta}\Big(\sum_i b_{i\beta}\frac{\mathrm{d}X_i(\tau)}{\mathrm{d}\varphi(\tau)}+$$

$$+\frac{\mathrm{d}P_{z_\beta}}{\mathrm{d}\varphi(\tau)}\Big)\Big]\mathrm{d}\varphi(\tau),\quad (i=1,\ldots,n), \qquad (8.18)$$

který zahrnuje i počáteční podmínky.

Je-li jílová vrstva takového druhu, že lze zhruba přibližně předpokládat afinitu konzolidace s dotvarováním betonu, lze podle (8.13) řešit úlohu přímo z rovnic (4.9), neboť člen δ_{c_i} lze vypustit a deformace od jílové vrstvy ve smyslu X_j na základní soustavě zahrnout do členů δ_j', popř. δ_{ij}'. Tyto deformace se vypočtou jako $\varkappa$-násobek $[\varkappa \doteq 1/\overline{\varphi}(\infty)]$ konečné deformace odpovídající na základní soustavě vnějšímu zatížení v čase t nebo zatížení $\overline{X}_j=1$.

Jako speciální případy obecného řešení lze řešit systém konstrukce — podloží, v němž dlouhodobé přetváření se vyskytuje jen v jedné složce.

a) Vyznačuje-li se dlouhodobým přetvářením pouze podloží, což nastává např. u ocelové konstrukce založené na podloží s jílovými vrstvami, zjednoduší se rov. (8.17) na rovnice

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\Delta X_j^{(m)}+\Delta\delta_i^{(m)}+\Delta\delta_{c_i}^{(m)}=0,\quad (i=1,\ldots,n) \qquad (8.19)$$

pro řešení pružné konstrukce, neboť pro konstrukce a nejílovité části podloží je $\varkappa=0$, takže $\delta_{ij}'=\delta_i'=\delta'_{sm_i}=0$. Řešení je jinak stejné jako v předcházejícím případu, platí tab. 8.2, kde na rozdíl od tab. 8.1 $\tilde{\delta}_i^{(m)}=0$.

Jde-li pouze o určení konečných hodnot napětí a deformace, lze je vypočíst přímo bez řešení časového průběhu, neboť v celém systému konstrukce—podloží vznikají zde jenom deformace vratné. Konečné hodnoty se vypočtou řešením pružné konstrukce na pružném podloží s modulem pružnosti odpovídajícím konečné hodnotě deformace podloží.

b) Probíhá-li dlouhodobé přetváření pouze v konstrukci, je $\delta_{c_i}=0$ a rov. (8.16), (8.17) se redukují na rov. (5.6), (4.9). Případ byl již řešen v odst. 8.2. Můžeme sem počítat i případy, kdy konzolidace jílových částí podloží probíhá vůči dotvarování betonu značně rychleji. Lze to vymezit zhruba na případy, kdy 80 % stupně konzolidace se dosáhne asi za méně než 10 dní.

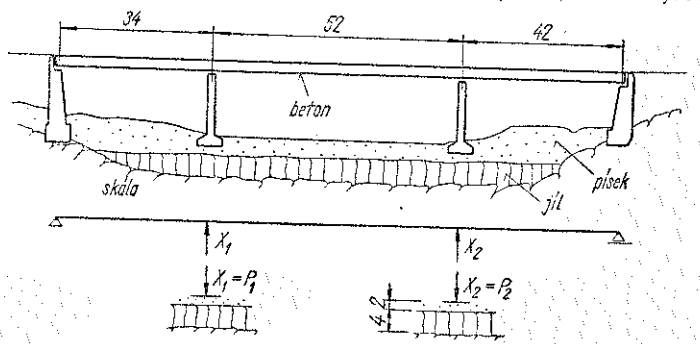
c) V případech, kdy lze očekávat relativně malé změny zatížení podloží (do 5 až 20 %), což jsou mnohé praktické případy, lze vliv sedání jílu počítat jako na nezávislé konstrukci s předem daným časovým průběhem posuvu podpor, jež se řeší stejně jako předcházející případ, tj. podle rov. (5.6) nebo (4.9). V rov. (4.8) pak je $\delta_{c_i}=\delta_{s_i}$ a člen $\delta_{c_i}(t)$,

$$\delta_{c_i}(t)\doteq\sum_\beta b_{\beta_i}\{[U_\beta(t)-U_\beta(t_0)]\sum_{\beta'}K_{\beta'\beta}P_{\beta'}(t_0)\},$$

$$\Delta\delta_{c_i}^{(m)}\doteq\sum_\beta b_{\beta_i}\Delta U_\beta^{(m)}\sum_{\beta'}K_{\beta'\beta}P_{\beta'}(t_0), \qquad (8.20)$$

se zahrne do členu δ_i. Pro předběžný návrh konstrukce je vhodné užít vždy tohoto způsobu.

Příklad 8.5.1. Uvažujme most z předpjatého betonu podle obr. 8.5. Byly určeny tyto výchozí hodnoty: $C=0{,}40$ m²/měs., $K=0{,}00010$ pro



Obr. 8.5.

přitěžování a $K=0{,}00003$ pro odlehčování; $\delta_{11}=0{,}00148$ m/Mp, $\delta_{12}=0{,}00138$ m/Mp, $\delta_{22}=0{,}00190$ m/Mp (včetně deformace písku v podloží); inverzní matice: $a_{11}=2090$ Mp/m, $a_{12}=-1520$ Mp/m a $a_{22}=1630$ Mp/m. Střední pole se provede letmou betonáží, krajní pole postupně na skruži, takže beton je různě starý. Před uzavřením středního pole jsou reakce $X_1=$

$= 680$ Mp, $X_2 = 710$ Mp, z čehož přitížení základu vzhledem k původnímu zatížení zeminou je 580 Mp nebo 610 Mp. Průměrná doba zavedení reakce X_1 je asi 6 měsíců před uzavřením středního pole (počátek spolupůsobení), reakce X_2 asi 2 měsíce. Další stálé zatížení je zavedeno ihned po uzavření středního pole a zvyšuje celkovou reakci na $X_1^{(0)} = 1360$ Mp, $X_2^{(0)} = 1410$ Mp. Další hodnoty jsou (pro $t_0 = 4$ měsíce) $\overline{\varphi}(\infty) = 1{,}35$, $\delta'_1 = -3{,}61$ m, $\delta'_2 = -4{,}59$ m, $\delta'_{sm_1} = \delta'_{sm_2} = -0{,}03$ m, $\delta'_{11} = 0{,}00131$ m/Mp, $\delta'_{12} = 0{,}00140$ m/Mp, $\delta'_{22} = 0{,}0202$ m/Mp.

Volme dělení $\Delta\varphi = 0{,}45$ (v praxi je třeba volit dělení jemnější), jemuž odpovídá $t^{(0)} = 2$ měsíce, $t^{(1)} = 12{,}1$ měsíce, $t^{(2)} = 30{,}8$ měsíce, $U^{(0)} = 0{,}337$, $U^{(1)} = 0{,}702$, $U^{(2)} = 0{,}925$. Stupeň konzolidace levé podpory v době $t = 0$ odpovídá $t_z = -4$ měsíce, tj. $U(-t_z) = 0{,}448$.

Výpočet se provede podle tab. 8.1. Časový dílek $m = 1$: pomocné hodnoty $\tilde{s}_1^{(1)} = 580 \cdot 10^{-4}(1 - 0{,}448) + 680 \cdot 10^{-4}/(1 - 0{,}337) = 0{,}1347$ m, $\tilde{s}_2^{(1)} = 610 \cdot 10^{-4} + 700 \cdot 10^{-4}/(1 - 0{,}337) = 0{,}1665$ m.

Sedání: $\Delta\delta_{c_1}^{(1)} = \Delta s_1^{(1)} = 0{,}365 \cdot 0{,}1347 = 0{,}0493$ m, $\Delta\delta_{c_2}^{(1)} = 0{,}365 \cdot 0{,}1665 = 0{,}0608$.

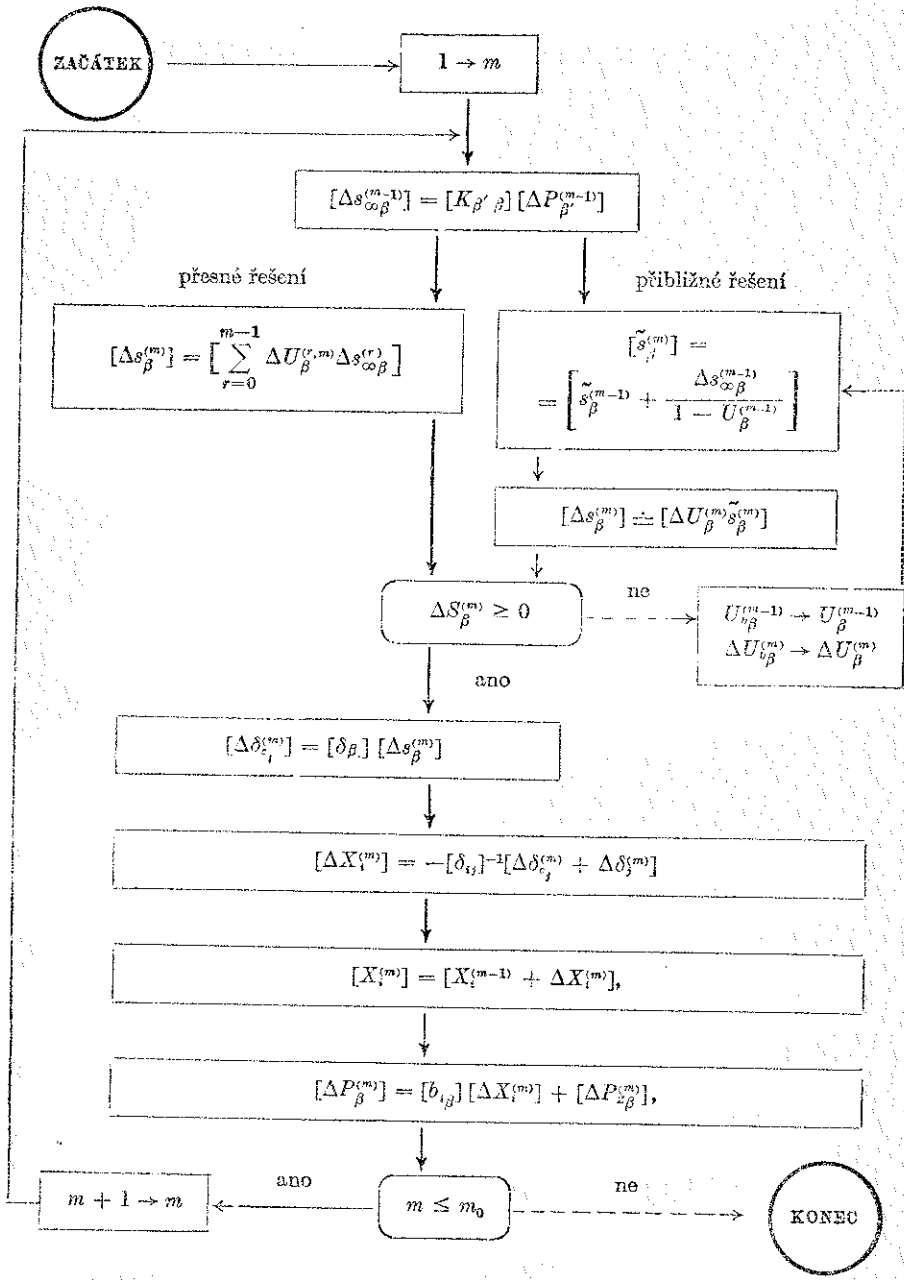
Pomocné hodnoty: $\tilde{\delta}_1^{(1)} = 0{,}00131 \cdot 1360 + 0{,}00140 \cdot 1410 - 3{,}61 - 0{,}03 = 0{,}1156$ m, $\tilde{\delta}_2^{(1)} = 0{,}00140 \cdot 1360 + 0{,}00202 \cdot 1410 - 4{,}59 - 0{,}03 = 0{,}1322$ m.

Změna reakce: $\Delta X_1^{(1)} = \Delta P_1^{(1)} = -2090(0{,}1156 \cdot 0{,}45 + 0{,}0493) + 1520(0{,}1322 \cdot 0{,}45 + 0{,}0608) = -28{,}8$ Mp, $\Delta X_2^{(1)} = \Delta P_2^{(1)} = 1520(0{,}1156 \cdot 0{,}45 - 0{,}0493) - 1630(0{,}1322 \cdot 0{,}45 - 0{,}608) = -42{,}1$ Mp.

Reakce: $X_1^{(1)} = 1360 - 28{,}8 = 1331{,}2$ Mp, $X_2^{(1)} = 1410 - 42{,}1 = 1367{,}9$ Mp.

V dalších dílcích $m = 2$ a 3 se postup opakuje. Obdrží se tak konečné hodnoty reakce $X_1(\infty) = 1302$ Mp, $X_2(\infty) = 1370$ Mp a sedání $s_1(\infty) = 0{,}088$ m, $s_2(\infty) = 0{,}109$ m. Celková změna reakce představuje $-4{,}3$ % nebo $-2{,}8$ %. Tato změna se značně projeví v momentu uprostřed pole, který vzroste z počáteční hodnoty 3840 Mp m o 1610 Mp m, tj. o $+42$ %, což je velmi mnoho. Nebylo by patrně ekonomické na tuto hodnotu dimenzovat výztuž trámu. Je proto nutno buď provést po určité době nadzvednutí nosníku lisy na podporách (rektifikace), nebo změnit způsob založení (piloty) nebo přejít ke staticky určitému systému. Velikost sedání není třeba omezovat, pokud je předchozím výpočtem prokázáno, že konstrukce snese vypočtené změny vnitřních sil, dovolují-li ovšem provozní důvody změnu tvaru konstrukce (např. změny nivelety mostu) sedáním vyvolanou.

Tabulka 8.2. Blokové schéma pro speciální případ ocelové konstrukce na jílu



8.6. Praktické poznámky

Účinky časového průběhu deformace podloží mohou způsobit vážné poškození staveb, takže jeho vliv je nutno vždy předem posoudit. U betonové konstrukce dotvarování značně redukuje účinky diferenciálního sedání, takže hospodárnější spojité konstrukce je někdy možno navrhnout i při větších sedáních, jež by podle dosavadních předpisů nevyhověla.

Proměna hodnot vnitřních sil a zatížení podloží působí změny napětí a ovlivňuje bezpečnost proti vzniku nepřípustných trhlin a též bezpečnost proti dosažení meze únosnosti konstrukce a podloží. Vedle charakteristik konstrukce a pružné poddajnosti podloží závisí účinky hlavně na době konzolidace jílu, tj. na tloušťce, propustnosti a odvodnění jílové vrstvy. Při rychlém průběhu sedání, kdy 60 % stupeň konzolidace nastává v průběhu prvého týdne po vybetonování, jsou účinky konzolidace jílu na konstrukci zanedbatelné. Probíhá-li sedání zhruba stejně rychle jako dotvarování betonu, tj. 60% stupeň konzolidace nastává asi za 2 až 3 měsíce, jsou účinky již značné, konstrukci lze však většinou vydimenzovat. Při sedání pomalejším než dotvarování betonu, tj. 60% konzolidace nastává asi za více než 1 rok, jsou účinky velmi značné, neboť beton je po době 1 roku již prakticky nepoddajný a nemůže se přizpůsobit dalším deformacím podloží. Takto se projevuje vliv sedání i u ocelové konstrukce na jílovém podloží. V těchto případech může konstrukce vyhovět jedině tehdy, když celková velikost sednutí je velmi malá, nebo když se počítá s rektifikacemi podpor (nadzvednutí lisy) po době několika let. Jinak je nutno změnit založení nebo umělým odvodněním urychlit konzolidaci jílu nebo přejít ke staticky určité konstrukci.

Výpočet spolupůsobení s podložím je sice pracný, ale lze jej naprogramovat pro samočinné počítače, což umožní jeho širší využití. Poškození stavby dlouhodobými účinky lze zabránit jednak vhodným návrhem konstrukce a stavebního postupu nebo rektifikacemi, jednak způsobem založení a zásahy do podloží, jako např. odvodněním jílové vrstvy pomocí drenážních vrtů apod.

9. Některé další problémy

9.1. Nehomogenní anizotropní konstrukce

Konstrukce mohou být nejen nehomogenní, ale též anizotropní, tj. s různými vlastnostmi v různých směrech, a to nejen pro deformace pružné, ale i pro dotvarování a pro smršťování. (Příkladem jsou např. konstrukce ze skelných laminátů). U betonové konstrukce se může jednat pouze o anizotropii konstrukční povahy, např. při zjednodušení roštu na desku.

Dále budeme uvažovat pouze případ ortogonální anizotropie, tj. ortotropie. U plošné konstrukce je charakterizována konstantami E_x, E_y, μ_{xy}, μ_{yx}, G_{xy}. Pružné deformace jsou dány vztahy $\varepsilon_x = \sigma_x/E_x - \mu_{xy}\sigma_y/E_y$, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G_{xy}$, ... Analogicky jako v kapitole 2 a 3 můžeme zavést deformaci při dotvarování a smršťování

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi} = \frac{1}{E_x}\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varphi} - \frac{\mu_{xy}}{E_y}\frac{\partial \sigma_y}{\partial \varphi} + \frac{\varkappa_x}{E_x}\sigma_x - \frac{\varkappa_y \mu'_{xy}}{E_y}\sigma_y + \varkappa_x \frac{\varepsilon_{sm(\infty)}}{\varphi(\infty)}, \qquad (9.1)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \varphi} = \frac{1}{G_{xy}}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varphi} + \frac{1}{G'_{xy}}\tau_{xy},$$

kde konstanty $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, μ'_{xy}, μ'_{yx}, G'_{xy}, $\varepsilon_{sm_x}(\infty)$, $\varepsilon_{sm_y}(\infty)$ vyjadřují nehomogenitu a ortotropii dotvarování a smršťování. Přitom podle principu virtuálných prací platí vztahy $\mu_{xy}/E_y = \mu_{yx}/E_x$, $\mu'_{xy}\varkappa_y/E_y = \mu'_{yx}\varkappa_x/E_x$.

Pro anizotropní konstrukce lze odvodit obdobné výsledky jako v předešlých kapitolách, výrazy jsou však složitější. Z anizotropních konstrukcí jsou nejdůležitější ortotropní desky. V praxi přichází v úvahu řešení některou přibližnou metodou podle kap. 5, tab. 2b, 3b, 1b nebo odst. 12. Postup se

liší jedině v převodu vnitřní deformace na zatížení (srovnej odst. 5.6). Místo rov. (5.20), (5.21) platí zde rovnice (odvození lze provést např. ze vztahů v [35], str. 396):

$$\tilde{w}'_{xx}{}^{*}) = -\frac{12}{d^3}\left(\frac{M_x}{E'_x} + \mu'_{xy}\frac{M_y}{E'_y}\right), \quad \tilde{w}'_{yy} = \ldots, \quad \tilde{w}'_{xy} = -\frac{1}{2C'}M_{xy}; \tag{9.2}$$

$$\tilde{M}_x = D_x(\tilde{w}'_{xx} + \mu_{xy}\tilde{w}'_{yy}), \quad \tilde{M}_y = \ldots, \quad \tilde{M}_{xy} = 2C\tilde{w}'_{xy}, \tag{9.3}$$

kde $D_x = \frac{1}{12}E_x d^3/(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})$, $D_y = \ldots$, $C = \frac{1}{12}G_{xy}d^3$, $D'_x = \frac{1}{12}E'_x d^3/(1 - \mu'_{xy}\mu'_{yx})$, $D'_y = \ldots$, $C' = \ldots$. Další postup je stejný jako v odst. 5.6. Jako ortotropní desku lze přibližně řešit různé nespojité konstrukce z izotropních materiálů, např. betonový trámový rošt, děrovanou desku apod., jsou-li prvky dostatečně hustě rozloženy.

U vrstevnaté ortotropní desky je postup podobný jako v odst. 6.8. Místo rov. (6.39), (6.40) platí za Kirchhoffovy hypotézy šest rovnic stejných jako (9.2), (9.3), psaných však pro i-tou vrstvu desky, a dalších šest rovnic

$$\tilde{\varepsilon}'_{x_i} = \frac{1}{d_i}\left(\frac{N_{x_i}}{E'_{x_i}} - \frac{\mu'_{xy}N_{y_i}}{E'_{y_i}}\right) + \varkappa_{x_i}\frac{\varepsilon_{sm_x}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \quad \tilde{\varepsilon}'_{y_i} = \ldots,$$
$$\tilde{\gamma}'_{xy_i} = \frac{N_{xy_i}}{G'_{xy}d_i}; \tag{9.4}$$

$$\tilde{N}_{x_i} = -\frac{E_{x_i}d_i}{1 - \mu_{xy_i}\mu_{yx_i}}(\tilde{\varepsilon}'_{x_i} + \mu_{xy_i}\tilde{\varepsilon}'_{y_i}), \quad \tilde{N}_{y_i} = \ldots,$$
$$\tilde{N}_{xy_i} = -G_{xy_i}d_i\tilde{\gamma}'_{xy_i}. \tag{9.5}$$

Další postup je stejný jako v odst. 6.8 (až na řešení pružné vrstevnaté desky od vnějšího zatížení). Jako ortotropní vrstevnatou desku lze přibližně řešit např. plošné působení spřaženého ocelobetonového mostu ($M_{xy_a} \doteq N_{xy_a} \doteq 0$) nebo mostu z prefabrikovaných nosníků s dodatečně vybetonovanou horní deskou, jsou-li vzdálenosti nosníků dostatečně malé.

9.2. Stabilitní problémy[1])

V dosavadních úvahách jsme se zabývali pouze řešením podle teorie 1. řádu. Ukažme nyní řešení některých problémů teorie 2. řádu, uvažující

*)] Viz poznámku na str. 113

[1]) Poznámka při korektuře: Podrobně o dlouhodobé stabilitě viz: Bažant Z. P.: Dlouhodobá stabilita a vzpěrná pevnost betonových sloupů, Inženýrské stavby, 1966 — nebo Sborník 5. Celostátní konference o předpjatém betonu v Žilině, v listopadu 1965, Dom techniky ČsVTS, Bratislava 1965, str. 114 — nebo též: Proc. ASCE, Jour. Struct. Div., Feb. 1966.

podmínky rovnováhy na přetvořené konstrukci (princip superpozice zatížení neplatí).

Mějme prut na koncích kloubově uložený a zatížený konstantní osovou silou P zavedenou v čase t_0. V průřezu x vzniká moment $P.(w + w_0)$, kde $w_0(x)$ je počáteční nerovnost nezatíženého prutu. Podle (4.2) platí

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{P}{EJ}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \varkappa w + \varkappa w_0\right) = 0. \tag{9.6}$$

Nechť EJ a $\varkappa$ jsou konstantní po délce prutu. Pro $w_0 = a_0 \sin(\pi x/l)$ lze řešení hledat ve tvaru $w = f(t)\sin \pi x/l$. Dosazením do (9.6) plyne diferenciální rovnice $(P_E/P - 1)\,\mathrm{d}f/\mathrm{d}\varphi - \varkappa f = \varkappa a_0$, kde $P_E = \pi^2 EJ/l^2$ je Eulerovo kritické břemeno. Užije-li se známého vztahu pro počáteční pružný průhyb $f(t_0) + a_0 = a_0/(1 - P/P_E)$, plyne odtud

$$f(t) + a_0 = \frac{a_0}{1 - P/P_E}\exp\frac{\varkappa\bar{\varphi}(t)}{P_E/P - 1}. \tag{9.7}$$

Tuto rovnici nelze užít pro velká břemena, blízká P_E, neboť zde z podmínky $f \to \infty$ plyne dlouhodobé kritické břemeno P_{kr} rovné P_E, ačkoliv ve skutečnosti je značně menší. Je to způsobeno tím, že v Dischingerově průběhu dotvarování se poměrné dotvarování pro velmi starý beton uvažuje nulové (odst. 2.2). Tuto teorii nelze proto užívat k určování dlouhodobých kritických břemen, ale jen pro výpočet průhybů při vzpěru pod skutečnými břemeny.

S postupem času se zvětšuje počáteční průhyb prutu podle funkce (9.7), což ovlivňuje bezpečnost proti porušení. Chceme-li, aby bezpečnost byla stejná jako u pružného nosníku, je nutno k hodnotě $\bar{\varphi}(t)$ nalézt redukovanou hodnotu $\bar{P}_E$ splňující tuto podmínku. Lze postupovat např. tak, že se předepíše určitá přípustná hodnota $\eta = \lg[(f + a_0)/(f_0 + a_0)]$, jejímž zavedením do (9.7) se obdrží

$$\bar{P}_E = \frac{P_E}{1 + \varkappa\bar{\varphi}(t)/\eta}. \tag{9.8}$$

Tento postup byl (pro $\varkappa = 1$) navržen v [50].

Vhodnějším postupem by patrně bylo určit, jaké redukované Eulerovo kritické břemeno $\bar{P}_E$ by muselo mít daný prut, aby ohybový moment od břemene P podle teorie pružnosti byl roven ohybovému momentu při dotvarování v čase t.

Tato podmínka znamená rovnost průhybů, tj. $f(t) + a_0 = a_0/(1 - P/\overline{P}_E)$, odkud vzhledem k (9.7) plyne

$$\frac{\overline{P}_E}{P_E} = \left[\frac{P_E}{P} - \left(\frac{P_E}{P} - 1\right) \exp\left(\frac{-\varkappa\overline{\varphi}(t)}{P_E/P - 1}\right)\right]^{-1}. \tag{9.8a}$$

Prut je pak třeba posoudit jako pružný prut s redukovaným modulem $\overline{E}$ odpovídajícím Eulerovu břemeni $\overline{P}_E = \pi^2\overline{E}J/l^2$. Podmínku stejného ohybového momentu by bylo možno snadno užít k určení $\overline{P}_E$ i pro případ kombinace dlouhodobého břemene s krátkodobým.

Řešení lze přibližně užít i pro mnohé složené pruty, jestliže síla P byla zavedena již na hotový, tj. spřažený složený průřez. Pak se dosadí přibližně $\varkappa_M$ za $\varkappa$ nebo $\varphi_M(t, t_0)$ za $\overline{\varphi}(t)$. Přesnější řešení by vyžadovalo uvažovat vnitřní statickou neurčitost průřezu jako v odst. 6.8.

Uvažujme nyní obecnou počáteční nerovnost. Vyjádříme-li ji pomocí Fourrierovy řady, obdržíme řešení ve tvaru

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)\,[A_r \sin(\alpha_r x) + B_r \cos(\alpha_r x)], \tag{9.9}$$

kde

$$f_r(t) + a_{0r} = [f_r(t_0) + a_{0r}] \exp \frac{\varkappa\overline{\varphi}(t)}{EJ\alpha_r^2/P - 1}. \tag{9.10}$$

Konstanty α_r jsou určeny okrajovými podmínkami prutu. Vidíme, že pro každou harmonickou složku průhybu platí obdobná závislost jako (9.7), a výsledek je proto kvalitativně stejný.

Jiný postup řešení jsou např. postupné aproximace. Do rov. (4.2) se dosadí $M_0 = Pw_0$ a její integrací se získá $w_1(x, t)$; postup se opakuje pro $M_1 = P(w_0 + w_1)$ atd. Řešení se takto obdrží ve tvaru mocninné řady v P a ve $\overline{\varphi}$, přičemž pro poloměr konvergence R řady mělo by platit $R > \overline{\varphi}(\infty)$. Tento postup lze užít, i když EJ a $\varkappa$ jsou proměnné po délce prutu.

Pro oblouk se střednicí danou pořadnicemi $z(x)$ platí v teorii druhého řádu při uvažování pouze svislých průhybů $w(x, t)$ (plochý oblouk) rovnice rovnováhy $M = \mathfrak{M} - H(z - w) + M_l(1 - x/l) + M_p x/l$, kde $H = H(t)$ je oblouková vodorovná síla, M_l, M_p momenty v patkách oblouku, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x,t)$ moment odpovídající vnějšímu zatížení na prostém nosníku podepřeném v patkách. Zanedbáme-li vliv posouvajících a normálných sil na deformace a píšeme-li u plochého oblouku pro pružné deformace přibližně $d^2w/dx^2 \doteq \doteq -M/EJ \cos\psi$, kde ψ je sklon tečny oblouku, dostaneme dosazením za M

do (4.2) pro dvoukloubový oblouk se stálým zatížením za přibližného předpokladu $dH/d\varphi = 0$ rovnici tvaru

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varkappa\right)c^2 w = F(x), \tag{9.11}$$

kde $c^2 = H/EJ \cos\psi$. Je-li $EJ \cos\psi$ a $\varkappa$ konstantní, lze řešení hledat ve tvaru $w = f(t)\,(A \sin\alpha x + B \cos\alpha x) + G(x)$. Konstanty α jsou dány okrajovými podmínkami. Rozvineme-li $F(x)$ v mocninnou řadu, můžeme hledat $G(x)$ též ve tvaru mocninné řady. Po dosazení do (9.11) obdržíme porovnáním součinitelů u stejných funkcí diferenciální rovnici 1. řádu pro $f(t)$.

Obecně platné a principem velmi jednoduché je řešení postupnými aproximacemi. K vnitřním silám S_1 podle teorie 1. řádu se vypočtou odpovídající deformace $w_1(x, t)$. Snadné je to zvláště za předpokladu homogenity oblouku, kdy w_1 má průběh tvaru podle rov. (4.30). Potom se vypočtou opět jako podle teorie 1. řádu změny vnitřních sil $\Delta S_1 = \Delta S_1(x, t)$ [za předpokladu homogenity podle rov. (4.21a)] odpovídající změně tvaru oblouku o w_1; k nim se pak určí odpovídající deformace $\Delta w_1(x, t)$. Dále se vypočtou vnitřní síly ΔS_2 odpovídající změně tvaru oblouku o Δw_1 atd. Řešení má ve $\overline{\varphi}$ tvar mocninné řady, hodnoty Δw_i po jednom až dvou krocích dostatečně přesně vytvářejí geometrickou řadu.

Stabilita je dotvarováním ovlivněna též u tenkých a plochých skořepin.

Celkově můžeme říci, že by předpisy pro stabilitu měly uvažovat dobu působení zatížení a stáří při jeho zavedení.

10. Rozbor různých teorií pro dotvarování betonu

10.1. Některé jednoduché možnosti zpřesnění

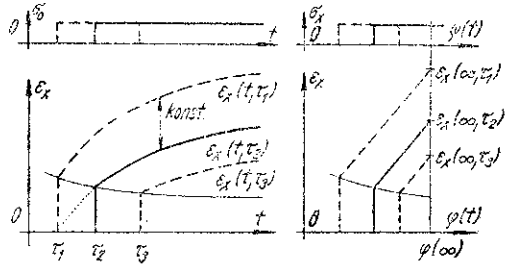
Kdyby nebyl zaveden předpoklad afinity, byl by koeficient rychlosti dotvarování $\varkappa$, definovaný vztahem (2.15), tj. $\varkappa = \mathrm{d}\varphi_{(\varkappa)}/\mathrm{d}\varphi$, časově proměnný. Podobně i pro smršťování bylo by možno uvažovat podle (2.21a) průběh, daný koeficientem rychlosti smršťování $\varkappa_{sm}(t)$ podle (2.21). Potom by sice všechny základní rovnice měly stejný tvar, avšak jejich koeficienty by nebyly konstantní, ale byly by funkcí času lineárně závislé na $\varkappa(t)$ nebo $\varkappa_{sm}(t)$ podle rov. (4.7). Řešení rovnic by potom bylo komplikovanější. U staticky neurčitého systému by to např. znamenalo řešit systém lineárních diferenciálních rovnic s proměnnými koeficienty (např. variací konstant). Snadno bylo by možno provést řešení numerickou integrací (integrace polygonální nebo Runge—Kuttova platí ve stejném tvaru). Výpočet by však byl pracnější v tom, že v každém dílku bylo by nutno určovat jinou hodnotu δ'_{ij}, δ'_i, δ'_{sm_i}. Výpočet bylo by možno zjednodušit, kdybychom funkci $\varkappa(t)$ nahradili lineárním dvojčlenem $\varkappa(t) = \varkappa_1 + \varkappa_2\bar{\varphi}(t)$, což je možno považovat za druhé přiblížení vzhledem k nahrazení konstantou v kapitole 2 (prvé přiblížení). Koeficienty δ'_{ij}, δ'_i, δ'_{sm_i} by pak měly též průběh lineární ve $\bar{\varphi}(t)$ a bylo by možno je tedy určit hodnotami ve dvou bodech, v bodě $t = t_0$ a $t \to \infty$. Stejné početní důsledky by měla i proměna $\mu' = \mu'(t)$.

Hlavní výhodou předpokladů v odst. 2.2 proti obecnější teorii je, že vedou na lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Ukažme nyní, že je možno vypustit předpoklad 3, aniž tuto výhodu ztratíme. Uvažujeme-li totiž modul E proměnný, $E = E(t)$, popřípadě též $\mu = \mu(t)$, dostaneme podle obr. 2.2b vpravo místo rov. (2.1) rovnici (obr. 10.1)

$$\varepsilon_x(t, \tau) = \sigma_x(\tau)\left[\frac{1}{E(\tau)} + \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{E_s}\right], \tag{10.1}$$

z níž podobným postupem jako v odst. 2.1 plyne diferenciální rovnice 1. řádu s proměnným koeficientem

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi} = \frac{1}{E(t)}\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varphi} + \frac{1}{E_s}\sigma_x. \tag{10.2}$$



Obr. 10.1. Zobecnění Dischingerova průběhu pro časově proměnné konstanty pružnosti (srovnej obr. 2.1)

Hodnota E_s zde značí jistou zvolenou střední hodnotu modulu $E(t)$. Všechny základní rovnice v této práci by měly sice stejný tvar, avšak v členech obsahujících E (nikoliv E') bylo by nutno E uvažovat proměnné. V rovnicích (4.9) pro staticky neurčitý systém by časově proměnné byly koeficienty δ_{ij}, δ_i, na rozdíl od koeficientů δ'_{ij}, ... při neafinním dotvarování. Pro výpočet je možno se spokojit s lineárním průběhem funkce $1/E(t)$ ve φ (druhé přiblížení). Stačilo by pak určit hodnoty δ_{ij} a δ_i pro $t = t_0$ a pro $t \to \infty$ a mezilehlé hodnoty by vyplývaly lineární interpolací ve φ. U jedenkrát staticky neurčitého systému lze při proměnném E podat řešení snadno i v uzavřeném tvaru. Rovněž je to snadné u homogenní konstrukce; platí vzorce stejného tvaru jako (3.6), (3.6a), (4.21), (4.21a), v nichž za předpokladu $E(t) = E_0(1 + 2\delta\bar{\varphi}(t))$ je třeba místo $\mathrm{e}^{-\bar{\varphi}(t)}$ psát všude funkce $\mathrm{e}^{-\bar{\varphi}(t)[1+\delta\bar{\varphi}(t)]}$.

Je však otázkou, má-li smysl — vzhledem k ostatním přibližnostem — proměnu $E(t)$ a $\varkappa(t)$ uvažovat.

Zpožděné pružné deformace při velkém odlehčení lze určit přibližným výpočtem jako dodatečný člen [35a].

10.2. Obecnější teorie dotvarování betonu

Rov. (2.1) vyjadřuje jen speciální případ lineárního dotvarování. Nejobecněji lze v mezích linearity celkovou poměrnou deformaci ε_x vzniklou

Poznámka při korektuře: Podrobně viz: Bažant Z. P., Phenomenological theories for creep of concrete based on rheological models, Acta technica ČSAV, 1966, č. 3.

působením konstantního napětí σ_x zavedeného v čase τ vyjádřit ve tvaru [1], [36], [1a] (obr. 2.1)

$$\varepsilon_x(t, \tau) = \sigma_x(\tau)\left(\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right) \tag{10.3}$$

lineárním v napětí σ_x. Tento tvar jednoznačně plyne z předpokladu 1 v odst. 2.2. Pro příčnou a smykovou deformaci obdobně platí

$$\varepsilon_y(t, \tau) = -\sigma_x(\tau)\left(\frac{\mu(\tau)}{E(\tau)} + \mu'(t, \tau)\, C(t, \tau)\right), \tag{10.3a}$$

$$\gamma_{xy}(t, \tau) = \tau_{xy}(\tau)\left(\frac{1}{G(\tau)} + C_1(\tau, t)\right), \tag{10.3b}$$

kde vzhledem k izotropii platí $G(\tau) = \frac{1}{2}E(\tau)/[1 + \mu(\tau)]$, $C_1(t, \tau) = 2C(t, \tau)\,[1 + \mu'(t, \tau)]$. Funkce $C(t, \tau)$ se nazývá míra dotvarování. [Platí $C(0, 0) = 0$, $C(\infty, \tau) < \infty$, $\partial C/\partial t > 0$, $\partial C/\partial \tau < 0$.] Vztahy (10.3) formulují obecnou teorii lineárního dotvarování.

Při proměnném napětí $\sigma_x(t)$, jež začalo působit v čase t_0, určí se deformace podle principu superpozice (viz např. [1])

$$\varepsilon_x(t) = \sigma_x(t_0)\left(\frac{1}{E(t_0)} + C(t, t_0)\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \sigma_x(\tau)}{\partial \tau}\left(\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right) \mathrm{d}\tau. \tag{10.4}$$

Integrací per partes se získá vztah

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right) \mathrm{d}\tau, \tag{10.5}$$

jenž při daném $\varepsilon_x(t)$ vyjadřuje Volterrovu integrální rovnici pro $\sigma_x(t)$. Derivuje-li se rov. (10.5) podle času t (jako integrál závislý na parametru t [38]), obdrží se po úpravě

$$\frac{\partial \varepsilon_x(t)}{\partial t} = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial \sigma_x(t)}{\partial t} - \int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial^2 C(t, \tau)}{\partial t\, \partial \tau} \mathrm{d}\tau - \sigma_x(t)\left[\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}\right]_{\tau = t}. \tag{10.6}$$

Vidíme, že na rozdíl od Dischingerova průběhu [rov. (2.5)] závisí zde rychlost deformace nejen na napětí v čase t, ale na celém předcházejícím průběhu napětí. Obdobné výrazy lze získat i pro ε_y a γ_{xy}.

Poznámka. Jestliže se přetváření uvažuje nezávislé na stáří betonu, což je přípustné jen u betonu velmi starého, platí rovnice

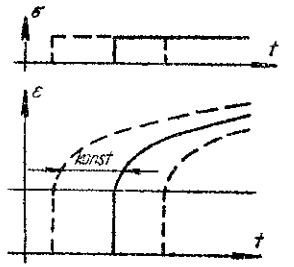
$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E} + \int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial C(t - \tau)}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau, \tag{10.5a}$$

v níž C je funkcí jedné proměnné $(t - \tau)$ a E = konst. Tato teorie se nazývá teorií následnosti nebo časově invariantní teorií (obr. 10.2).

Funkci $C(t, \tau)$ pro beton zavádí Arutjunjan [1] ve tvaru

$$C(t, \tau) = \psi(\tau)(1 - \mathrm{e}^{-\gamma(t - \tau)}), \tag{10.7}$$

přičemž volí $\psi(t) = C_0 + A_1/t$, $E(\tau) = E_0(1 - \beta\, \mathrm{e}^{-\alpha\tau})$. Hodnoty $\psi(t)$, α, β vyjadřují stárnutí betonu, $\psi(\tau)$ značí konečnou hodnotu deformace od stálého napětí $\sigma = 1$ zavedeného na betonu stáří τ. Hodnota γ charakterizující rychlost dotvarování se přibližně předpokládá nezávislá na τ, tj. jako konstanta.



Obr. 10.2. Dotvarování podle teorie následnosti (nezávislé na stáří)

Ukažme nyní, že pro funkci (10.7) lze integrální přetvárné rovnice převést na lineární diferenciální rovnice 2. řádu s proměnnými koeficienty, jež jsou řešitelné kvadraturami. Tak např. dosadíme-li (10.7) do rovnice (10.6) a derivujeme-li podle t, dostaneme rovnici, v níž figuruje stejný integrál jako v rovnici původní. Jeho eliminací z obou rovnic dostaneme diferenciální rovnici mezi ε_x a σ_x:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} + \left[\gamma\left(\frac{1}{E(t)} + \psi(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{E(t)}\right)\right] \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} \tag{10.7a}$$

s počátečními podmínkami:

$$\sigma_x(t_0) = E(t_0)\varepsilon_x(t_0), \quad \frac{\partial \varepsilon_x(t_0)}{\partial t} = \frac{1}{E(t_0)} \frac{\partial \sigma_x(t_0)}{\partial t} + \gamma\psi(t_0)\, \sigma_x(t_0)$$

plynoucími z rovnic (10.5) a (10.6).

Definici součinitele dotvarování podle rov. (2.9) je nutno při matematicky přesném řešení považovat za rovnici stejného tvaru jako (10.7), neboť funkce (2.9) platí — přesně vzato — pro libovolnou změnu napětí v čase τ. Pro

konstantní napětí zavedené v čase τ je pak totiž průběh deformace dán výrazem tvaru (10.3), kde $C(t, \tau) = \frac{\bar{\varphi}_\infty(\tau)}{E}\beta(t-\tau)$, což je tvar stejný jako (10.7); $\bar{\varphi}_\infty(\tau) = E\psi(\tau)$ a při užití rov. (2.9b) $\tau_b = 1/\gamma$. Přesné řešení podle (2.9) vede tedy analogicky s (10.7a) na diferenciální rovnici mezi ε_x a σ_x:

$$\tau_b \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial t^2} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\tau_b}{E}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} + \frac{1 + \bar{\varphi}_\infty(t)}{E}\frac{\partial \sigma_x}{\partial t}. \qquad (10.7b)$$

Jiný vhodný tvar funkce $C(t, \tau)$ je $C_1(t) - C_1(\tau) + C_2(t-\tau)$, kde dlouhodobé vratné deformace vyjádřené funkcí C_2 nezávisí na stáří betonu. Speciální úpravou této funkce je [36] $(C_0 + A\,\mathrm{e}^{-\gamma\tau})(1 - \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})$. Prokopovič doporučuje v rov. (10.7) uvažovat $\psi = C_1 - C_2/(a_1 + t)$ pro $\tau \leq t_1$ a $C_3 + C_4/(a_2 + t)$ pro $t \geq t_1$. Obecnějším tvarem je funkce $\sum_k C_k(\tau)\,\mathrm{e}^{-\gamma_k(t-\tau)}$, jež vede na diferenciální rovnice vyšších řádů.

Vzhledem k linearitě rov. (10.5) existuje i v obecné teorii analogie s teorií pružnosti.[1]) Z každé úlohy teorie pružnosti lze získat odpovídající rovnice pro dotvarování, zamění-li se v nich $1/E$ za integrální operátor, kterým přechází napětí σ_x v pravou stranu rovnice (10.5). Obdobně lze určit operátory pro μ/E a $1/G$. V případě průběhu (10.7) lze vzhledem k (10.7a) [a podobně i pro (10.7b)] uvažovat místo integrálního operátoru odpovídajícího $1/E$ přímo operátor diferenciální

$$\mathbf{E}^{-1} = \left\{\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[\gamma\left(\frac{1}{E} + \psi\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{E}\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \qquad (10.7c)$$

a obdobné operátory odpovídající μ/E a $1/G$.

Uvedenou záměnou obdržíme pro n-krát staticky neurčitý systém (konstrukce, průřez ap.) v obecném případě systém n Volterrových integrálních rovnic nebo v případě průběhu (10.7) [nebo též (2.9)] systém lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s proměnnými koeficienty, jehož řešení je značně složitější než pro rov. (4.9). Laplaceova transformace zde na rozdíl od odst. 3.5 není vhodná, neboť koeficienty operátoru (10.7c) jsou časově proměnné.

U homogenního tělesa je řešení jednodušší, neboť podle uvedené záměny obdržíme obecně pro napětí jedinou Volterrovu integrální rovnici

$$\sigma_x(t) - E(t)\int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right)\mathrm{d}\tau = \sigma_{x_{el}}(t), \qquad (10.8)$$

[1]) Viz poznámka pod čarou na str. 168.

kde $\sigma_{x_{el}}(t)$ jsou napětí podle teorie pružnosti, a speciálně pro průběh (10.7) rovnici 2. řádu

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} + E\left[\gamma\left(\frac{1}{E} + \psi\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{E}\right)\right]\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sigma_{x_{el}}}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial \sigma_{x_{el}}}{\partial t}, \qquad (10.8a)$$

jejíž řešení vede při $E = \text{konst}$ na neúplné gamma funkce.

Obecnější lineární teorií, např. podle (10.7), lze ve srovnání s Dischingerovým průběhem také vyjádřit dlouhodobé vratné deformace (dopružování) a dotvarování velmi starého betonu, kdy však přesto vratnost veškerých dlouhodobých deformací neodpovídá skutečnosti. Vliv vlhkosti a teploty a jejich změn, vliv rozměrů, tvaru a vzdálenosti od povrchu a vliv různého stáří betonu na nehomogenitu dotvarování bylo by možno zavést ve funkci $\psi(t)$ [rov. (10.7)] stejně jako v kap. 2. Aby však užití obecné teorie mělo skutečně smysl, bylo by nutno tyto vlivy, a navíc i jiné další vlivy (krátkodobé nevratné deformace, nevratnost dlouhodobých deformací velmi starého betonu) vyjádřit srovnatelně přesnějším způsobem. Z těchto důvodů nelze zde dosud očekávat podstatně lepší přiblížení skutečnosti a složitost tohoto řešení často nepřinese zatím patřičný efekt. Předpoklady kapitoly 2, zvláště při zpřesněném vztahu (2.9), jsou proto za dnešního stavu pro návrh konstrukcí oprávněny. [Jsou speciálním případem pro $C(t, \tau) = [\varphi(t) - \varphi(\tau)]/E$, $E = \text{konst}$, $\mu(t, \tau) = \mu = \text{konst}$, $\mu'(t, \tau) = \mu' = \text{konst}$.] Výsledky je však třeba brát jako přibližné a v důležitých a nových případech ověřovat je experimentálně nebo měřením na hotových stavbách.

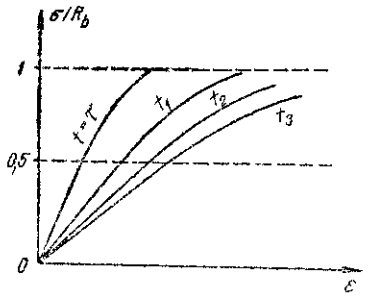
Poznámka. Při experimentálním určení napětí je však nutno pro výpočet průběhu $\sigma_x(t)$ ze změřeného průběhu $\varepsilon_x(t)$ vždy užít obecnou teorii.

Jestliže napětí betonu překročí hodnotu asi 0,5 pevnosti $R_b(t)$, stává se dotvarování nelineárním. Princip superpozice pak neplatí. Nejjednodušší rovnice, jakou lze zavést, je rovnice [1], [50]

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varphi} = \frac{1}{E(t)}\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varphi} + \frac{f(\sigma_x)}{E_s} \qquad (10.2a)$$

analogická s (10.2), v níž veškeré krátkodobé deformace se přibližně pokládají za pružné; $f(\sigma_x)$ značí jistou funkci napětí, jež pro $\sigma_x(t) \leq \eta R_b(t)$ ($\eta \doteq 0{,}5$) je rovna σ_x, pro vyšší hodnoty vzrůstá stále rychleji než σ_x. Vhodný její tvar zde je např. $\sigma_x(t) + \beta[\sigma_x(t)/R_b(t) - \eta]^2$, kde β je jistá konstanta, která ve skutečnosti závisí na stáří betonu (klesá) a době působení zatížení. Při konstantním napětí od času τ je zde $\varepsilon_x = \sigma_x(\tau)/E(\tau) + [\varphi(t) - \varphi(\tau)]f[\sigma_x(\tau)]/E_s$.

Podle rov. (10.2a) lze za zjednodušujícího předpokladu β nebo $E = \text{konst}$ teoreticky řešit centricky tlačené soustředné složené průřezy a zjednodušeně některé případy ohybu složeného průřezu (separací proměnných v diferenciální rovnici) [1], [50]. Při složitějších závislostech než (10.2a), např. $f(\sigma_x)\, C(t, \tau)$ místo $C(t, \tau)$ v rov. (10.5), se řešení stává velice obtížné [35a].



Obr. 10.3. Izochrony dotvarování betonu při konstantním napětí a různých časech

Jednoduchý přibližný způsob výpočtu napětí a deformace v čase t, analogický k metodě ideálních přetvárných modulů, by byl, jestliže bychom považovali izochronu v čase t (odst. 2.2, obr. 10.3) za krátkodobý pracovní diagram a řešili pro něj konstrukci podle teorie nelineární pružnosti. Pracovní napětí betonu zasahují někdy do oblasti nelinearity u předpjatých průřezů [viz rov. (6.20c)]. Dále bude nutno nelinearitu uvažovat pro určení mezní únosnosti za dlouhodobého zatížení. Celkem lze konstatovat, že poměrné hodnoty relaxace napětí, přesunů napětí do výztuže a ztrát předpětí jsou v nelineární oblasti větší, přičemž nelineární část dotvarování probíhá rychleji než lineární (a s rostoucím σ_x postupně přechází v plasticitu).

10.3. Reologické modely. Teorie viskoelasticity

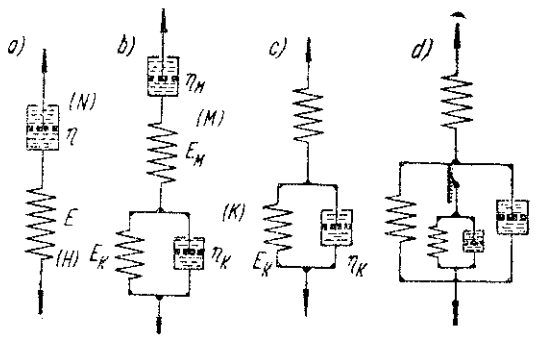
Dříve popsané formulace přetváření betonu se skládají z různých funkcí, jež byly více méně hypoteticky voleny. Po fenomenologické stránce názorněji a výstižněji lze dospět k rovnicím přetváření pomocí reologických modelů [24], [24a], [26a], [27], [35a], [37], [43], hlavně mechanických. (Jiné modely, vhodné přímo pro řešení, jsou elektrické analogie.) Teoreticky nejsprávnější, avšak značně složité, je vycházet z rozboru mikrostruktury [1a], [26a].

Při znázornění přetvárné rovnice hmoty se volí model s jedním vstupním napětím a deformací, které se přiřazují určitým složkám tenzoru (nebo deviatoru) napětí nebo deformace. Pro úplné znázornění izotropní hmoty stačí např. znát model pro vztah σ_x a ε_x a model pro vztah σ_x a ε_y při jednoosém tahu a tlaku. (Někdy je místo toho vhodnější (u kovů) za základní volit vztahy mezi složkami deviátorů, tj. mezi τ_{xy} a γ_{xy}, a mezi středním normálným napětím a střední dilatací.)

Pro lineární závislost napětí a deformace jsou základními prvky modelu pružina neboli Hookeův prvek H o přetvárné rovnici $\sigma_x = E\varepsilon_x$ a tlumič neboli Newtonův prvek N (viskózní, vazký, např. děrovaný píst ve válci s vazkou kapalinou) o rovnici $\sigma_x = \eta\, \mathrm{d}\varepsilon_x/\mathrm{d}t$, kde η je součinitel viskozity (popřip. též setrvačná hmota o rovnici $\sigma_x = m\, \mathrm{d}^2\varepsilon_x/\mathrm{d}t^2$, jíž však nebudeme uvažovat). Reologický model se sestavuje spojováním prvků paralelně (znak |), přičemž deformace jsou stejné a napětí se sčítají, nebo sériově (znak —), kdy napětí jsou stejná a deformace se sčítají. Řešení konstrukcí při závislosti napětí a deformace, jíž lze znázornit pružinami a tlumiči, je předmětem teorie viskoelasticity.

Spojení prvků H—N tvoří tzv. Maxwellův článek M (obr. 10.4a), pro nějž plyne přetvárná rovnice (zvaná Maxwellova)

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}\sigma_x. \tag{10.9}$$



Obr. 10.4. a) Maxwellův článek, b) Burgersův model, c) normální model, d) normální model rozšířený

Je-li E a η nezávislé na čase t, obdržíme odtud

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E}\sigma_x(t) + \frac{1}{\eta}\int_{t_0}^{t}\sigma_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{10.9a}$$

Spojení prvků $H \mid N$ tvoří tzv. Kelvinův článek K (jinak též Voigtův) o přetvárné rovnici

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x}{\mathrm{d}t} \tag{10.10}$$

neboli pro konstantní E a η

$$\varepsilon_x(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)E/\eta}\left(\varepsilon_{x_0} + \frac{1}{\eta}\int_{t_0}^{t}\sigma_x(\tau)\,\mathrm{e}^{(\tau-t_0)E/\eta}\,\mathrm{d}\tau\right), \qquad (10.10a)$$

kde ε_{x_0} je počáteční deformace. Maxwellův článek vyjadřuje dlouhodobá plastická přetvoření a nevratnou relaxaci napětí, Kelvinův prvek zpožděné pružné přetvoření (při uvažování setrvačnosti též tlumené kmitání), relaxaci však nikoliv. Podle těchto vlastností nazývají se též článek relaxační a zpožďovací. (Pozn.: Kelvinův článek je nejjednodušším modelem konsolidace jílu.)

Lineární dlouhodobé deformace vratné i nevratné lze nejjednodušeji vyjádřit tzv. Burgersovým modelem $B = M—K = (H_M—N_M) — (H_K \mid N_K)$, v němž prvek H_M vyjadřuje krátkodobé vratné deformace, prvek N_M dlouhodobé nevratné deformace a článek K dlouhodobé vratné deformace (obr. 10.3b). Uvažujme opět konstanty E_M, η_M, E_K, η_K, nezávislé na čase. Potom při konstantním napětí σ_x zavedeném v čase τ plyne sečtením rov. (10.9a) a (10.10a) (pro $\varepsilon_{x_0} = 0$):

$$\varepsilon_x(t,\tau) = \sigma_x(\tau)\left[\frac{1}{E_M} + \frac{t-\tau}{\eta_M} + \frac{1}{E_K}\left(1 - \mathrm{e}^{-(t-\tau)E_K/\eta_K}\right)\right]. \qquad (10.11)$$

Všimněme si, že je to speciální případ obecné rovnice (10.1) pro E = konst a $C(t,\tau)$ rovné součtu druhého a třetího členu v závorce [a též speciální případ rovnice (10.5a)]. Výraz $\varepsilon_x(t)$ pro proměnné napětí $\sigma_x(t)$ lze odvodit buď z rov. (10.11) podle principu superpozice podobně jako v odst. 10.2 nebo 2.2, anebo přímo sečtením rovnic (10.9a) a (10.10a). Obdrží se (pro $\varepsilon_{x_0} = 0$):

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E_M} + \int_{t_0}^{t}\frac{\sigma_x(\tau)}{\eta_M}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\eta_K}\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)E_K/\eta_K}\int_{t_0}^{t}\sigma_x(\tau)\,\mathrm{e}^{(\tau-t_0)E_K/\eta_K}\,\mathrm{d}\tau. \qquad (10.12)$$

V diferenciálním tvaru je přetváření Burgersova modelu dáno rovnicí

$$b_2\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_x}{\mathrm{d}t^2} + b_1\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x}{\mathrm{d}t} + b_0\varepsilon_x = a_2\frac{\mathrm{d}^2\sigma_x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} + a_0\sigma_x, \qquad (10.13)$$

kde $b_2 = \eta_K$, $b_1 = E_K$, $b_0 = 0$, $a_2 = \eta_K/E_M$, $a_1 = 1 + E_K/E_M + \eta_K/\eta_M$, $a_0 = E_K/\eta_M$.

Rov. (10.13) plyne z rovnice (10.9) pro $\varepsilon_x = \varepsilon_M$ a (10.10) pro $\varepsilon_x = \varepsilon_K$ eliminací ε_M, ε_K za podmínky $\varepsilon_M + \varepsilon_K = \varepsilon_x$.

Vedle Burgersova modelu existují i jiné modely složené ze čtyř prvků.

Jsou to např.: $H_1—[(H_2—N_2) \mid N_1]$, $N_1—[H_1 \mid (H_2—N_2)]$, jež jsou ekvivalentní s Burgersovým modelem, nebo model $K_1—K_2 = (H_1 \mid N_1)—(H_2 \mid N_2)$ vyjadřující složené vratné zpožďování a model $M_1 \mid M_2 = (H_1—N_1) \mid (H_2—N_2)$ znázorňující složenou relaxaci. Vedou vesměs na rovnici tvaru (10.13); pro poslední model např. platí $a_0 = 1$, $a_1 = \eta_1/E_1 + \eta_2/E_2$, $a_2 = \eta_1\eta_2/E_1E_2$, $b_0 = 0$, $b_1 = \eta_1 + \eta_2$, $b_2 = (E_1 + E_2)\,a_2$; pro předposlední model platí $b_2 = \eta_1\eta_2/E_1E_2$, $b_1 = \eta_1/E_1 + \eta_2/E_2$, $b_0 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = (\eta_1 + \eta_2)/E_1E_2$, $a_0 = 1/E_1 + 1/E_2$. Na rovnici tvaru (10.13) s nenulovým členem $b_0\varepsilon_x$ i $a_0\sigma_x$ vedou modely složené z pěti prvků.

Vynecháme-li v Burgersově modelu prvek N_M, obdržíme model $H_M—K = H_M—(H_K \mid N_K)$, zvaný „normální", který vyjadřuje pouze deformace vratné, krátkodobé i dlouhodobé, a zobrazuje též vratnou relaxaci napětí. Je zřejmé, že je speciálním případem rov. (10.3) i (10.5a) pro $C(t,\tau) = (1 - \mathrm{e}^{-(t-\tau)E_K/\eta_K})/E_K$. Jeho přetváření je dáno rov. (10.11), (10.12) pro $\eta_M \to \infty$ nebo diferenciální rovnicí

$$b_1\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x}{\mathrm{d}t} + b_0\varepsilon_x = a_1\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} + a_0\sigma_x, \qquad (10.14)$$

kde $b_1 = 1$; $b_0 = E_K/\eta_K$; $b_1 = 1/E_M$, $a_0 = (1 + E_K/E_M)/\eta_K$. Ekvivalentní s tímto modelem je též model $H_1 \mid (H_2—N_2)$. Konečné hodnoty odpovídající přetváření podle tohoto modelu dávají řešení ideálními moduly pro $t \to \infty$ [$E_M = E$, $E_K = E'/\overline{\varphi}(\infty)$].

Lineární viskoelastické přetváření lze nejobecněji vyjádřit modelem z nekonečného počtu nejrůzněji spojovaných prvků H a N o různých hodnotách konstant, jejichž rozdíly pro sousední prvky se blíží k nule. Důležitým případem tohoto modelu jsou řady $M_1 \mid M_2 \mid M_3 \mid \ldots \mid M_\infty$ (Wiechertův model) nebo $K_1—K_2—\ldots—K_\infty$, z nichž prvá vyjadřuje nejobecnější složenou nevratnou relaxaci napětí, druhá nejobecnější složené vratné zpožďování. Prvý model se charakterizuje někdy funkcí $E = f_M(\eta/E)$ udávající tzv. spektrum relaxace (η/E se nazývají doby relaxace), druhý model se popisuje funkcí $E = f_K(\eta/E)$ vyjadřující tzv. spektrum zpožďování (η/E se nazývají doby zpožďování). V obecném případě hmot jsou tato spektra spojitá, pro model z konečného počtu prvků jsou diskretní (nespojitá). Analyticky je možné uvažovat i některé druhy spojitých spekter.

Přetváření izotropní hmoty zobrazené nejobecnějším lineárním modelem vede na přetvárné rovnice

$$E\varepsilon_x = \sigma_x + \mu(\sigma_y + \sigma_z), \quad G\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \qquad (10.15)$$

kde $\boldsymbol{E}$, μ, $\boldsymbol{G}$ značí lineární diferenciální operátory tvaru

$$\boldsymbol{E} = \frac{b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + \ldots + b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}}{a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + \ldots + a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}}, \quad \boldsymbol{G} = \ldots, \tag{10.15a}$$

mezi nimiž vzhledem k izotropii platí vztah $2\boldsymbol{G}(1 + \mu) = \boldsymbol{E}$. Lze ukázat, že rovnice (10.15) jsou pro $n \to \infty$, $m \to \infty$ ekvivalentní s (10.5a). Jejich speciálním případem jsou rov. (10.9), (10.10), (10.13), (10.14) aj.

Z linearity těchto rovnic vyplývá jejich analogie k Hookeovu zákonu, při níž konstantám E a μ odpovídají operátory $\boldsymbol{E}$ a μ. Záměnou konstant za operátory lze získat z přetvárných rovnic různých problémů v teorii pružnosti přetvárné rovnice pro viskoelastické přetváření. Provedením Laplaceovy transformace přecházejí tyto rovnice v rovnice teorie pružnosti, takže viskoelastické přetváření lze považovat za quasistatické. Analogii s pružností lze podle (10.5a) vyjádřit též integrálně; konstantě $1/E$ odpovídá operátor $1/E + \int_{t_0}^{t} \ldots [\partial C(t - \tau)/\partial\tau]\, \mathrm{d}\tau$ ap., což stejně platí i ve speciálních případech (10.9a) aj.

Pro znázornění nelineární závislosti napětí a deformace jsou základními prvky prvek plastický P, např. dvě třecí destičky přitlačované k sobě konstantní silou, o přetvárném vztahu $\varepsilon_x = 0$ pro $\sigma_x < \sigma_{x_s}$ a $\sigma_x = \sigma_{x_s}$ pro $\varepsilon_x > 0$, kde σ_{x_s} je napětí na mezi plasticity, a prvek zpevňující Z, např. dvě posuvné destičky s ozuby nebo prověšené nehmotné spojovací lano, o přetvárném vztahu $\sigma_x = 0$ pro $\varepsilon_x < \varepsilon_{x_z}$ a $\varepsilon_x = \varepsilon_{x_z}$ pro $\sigma_x > 0$, kde ε_{x_z} je mez zpevnění. Dále navrhneme též užití matematicky jednoduchého prvku — západky S, která umožňuje jen růst deformace a platí tedy pro ni buď $\sigma_x = 0$, nebo $\mathrm{d}\varepsilon_x/\mathrm{d}t = 0$.

Spojení prvků $N \mid P$ tvoří tzv. vláčný článek V o vztahu $\mathrm{d}\varepsilon_x/\mathrm{d}t = \sigma_x/\eta$ pro $\sigma_x < \sigma_{x_s}$ a $\sigma_x = \sigma_{x_s}$ pro $\mathrm{d}\varepsilon_x/\mathrm{d}t > \sigma_x/\eta$. Dále se zavádí např. Saint-Venantův článek pružně plastický H—P, Binghamův článek pružně vláčný H—$(N \mid P)$ aj.

Hlavní druhy nelineárního přetváření je možno znázornit, zapojí-li se v lineárním reologickém modelu prvky plastické a zpevňující, z nichž prvý skýtá nelinearitu v závislosti na napětí a druhý v závislosti na deformaci. Krátkodobé nevratné deformace lze vyjádřit např. tím, že na Burgersův model se napojí série $P_1 - Z_1 - P_2 - Z_2 - \ldots - P_n$ (pro beton je možno vyjádřit je funkcí tvaru $\varepsilon_0 \operatorname{tg}(C\sigma)$ pro prvé zatěžování [27]), nebo tím, že místo prvku H_M se zapojí řada $H_0 \mid (H_1$—$P_1) \mid (H_2$—$P_2) \mid \ldots P_n$ nebo řada H_1—P_1—H_2—P_2—…—P_n. Nelineární krátkodobé vratné deformace lze vyjádřit např. tím, že v Burgersově modelu se nahradí prvek H_M řadou $H_0 \mid (H_1$—$Z_1) \mid (H_2$—$Z_2) \mid \ldots \mid Z_n$ (nadpružná hmota). Dlouhodobé vratné deformace nelineární v napětí se vyjádří, nahradí-li se obdobnou řadou prvek H_K. Dlouhodobé nevratné deformace nelineární napětí se znázorní, nahradí-li se H_K řadou $H_0 \mid (H_1$—$P_1) \mid (H_2$—$P_2) \mid \ldots \mid P_n$ nebo řadou H_0—P_1—H_1—$P_2 \ldots P_n$, deformace nelineární v rychlosti změny napětí, zamění-li se prvek N_M řadou $N_0 \mid (N_1$—$P_1) \mid (N_2$—$P_2) \mid \ldots P_n$ nebo řadou N_0—P_1—N_1—…—P_n (nevratné v rychlosti přetváření) nebo jinak řadou $N_0 \mid (N_1$—$Z_1) \mid \ldots \mid Z_n$ (vratné v rychlosti), a dlouhodobé vratné deformace nelineární v rychlosti změny napětí, nahradí-li se obdobnou řadou prvek N_K. Uvažujeme-li řady prvků jako nekonečné a takové, aby při zapojení v sérii rozdíly konstant sousedních prvků a při zapojení paralelním hodnoty konstant se blížily k nule, zobrazí model plynulou nelinearitu. Matematicky nelinearita znamená, že přetvárné konstanty pružin tlumičů v lineárním modelu jsou závislé na napětí nebo deformaci, popřip. i na jejich derivacích ap.

10.4. Model betonu s ohledem na vliv stárnutí

Lineární modely teorie viskoelasticity podle předcházejícího odstavce nelze užít pro zobrazení lineárního přetváření betonu, neboť nevyjadřují podstatnou vlastnost betonu, totiž jeho fyzikálně chemické stárnutí.

Matematicky lze stárnutí betonu vyjádřit růstem součinitele vazkosti a modulu pružnosti v závislosti na stáří betonu, tj. $\eta = \eta(t)$, $E = E(t)$. Při stárnutí materiálu je tedy třeba uvažovat přetvárné konstanty zvoleného modelu jako předem dané funkce času. Rovnice tlumiče zůstává stejná, rovnice pružiny je $\mathrm{d}\sigma_x/\mathrm{d}t = E\, \mathrm{d}\varepsilon_x/\mathrm{d}t$. Linearita v napětí a platnost principu superpozice zůstává přitom zachována.

Nejobecnější rovnice přetváření mají v tomto případě též tvar (10.15), (10.15a), avšak koeficienty $a_i = a_i(t)$, $b_i = b_i(t)$, … jsou dané funkce času, které mají pro $t \to \infty$ konečnou limitu. Lze ukázat, že tyto rovnice a příslušný model o konečném počtu prvků jsou ekvivalentní s obecnou teorií lineárního dotvarování ve tvaru integrální rovnice (10.5). Analogie s pružností zůstává i zde v platnosti.

Proměnu konstant v rovnici (10.15) i v jejích speciálních případech lze vyloučit, jestliže všechny funkce $a_r(t)$, $b_r(t)$ mají tvar $a_r'\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^r$, $b_r'\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^r$, kde a_r', b_r' jsou konstanty a $\varphi = \varphi(t)$ je jistá funkce času, jež se zavede jako nová nezávislé proměnná.

Nejjednodušším modelem přijatelným pro dotvarování betonu je Maxwellův článek (obr. 10.4a). Porovnáme-li totiž rovnici (2.5) s rovnicí (10.9) platnou i pro Maxwellův článek s časově proměnnými konstantami, zjistíme, že jsou totožné, jestliže součinitel viskozity je časově proměnný podle vztahu

$$\eta(t) = E' \Big/ \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{10.16}$$

přičemž pro $t \to \infty$ je zřejmě $\lim \eta = \infty$. Vidíme tedy, že modelem Dischingerova průběhu dotvarování je Maxwellův článek s konstantním modulem E a časově proměnným součinitelem viskozity (10.16), plynoucím z proměny součinitele dotvarování. Obráceně součinitel dotvarování lze vyjádřit součinitelem viskozity ve tvaru $\varphi(t) = E' \int_0^t [\mathrm{d}\tau/\eta(\tau)]$. (Přitom $\eta(t)$ musí být dáno tak, aby tento integrál pro $t \to \infty$ konvergoval.)

Uvažuje-li se též modul E časově proměnný, zobrazí Maxwellův článek přetváření podle rovnice (10.2). Jestliže se dále součinitel viskozity η uvažuje závislý na napětí σ_x, zobrazuje Maxwellův článek nelineární dotvarování podle rovnice (10.2a).

Podívejme se nyní na tzv. normální model H—$(H_K \mid N_S)$ (obr. 10.4c) o konstantách $E(t)$, $E_K(t)$ a $\eta_K(t)$. Pro tento model lze odvodit přetvárnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial t^2} + \frac{1}{\eta_K}\left(E_K + \frac{\partial\eta_K}{\partial t}\right)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial t^2} + \left[\frac{1}{E\eta_K}\left(E + E_K + \frac{\partial\eta_K}{\partial t}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{E}\right)\right]\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}. \tag{10.17}$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (10.7a) odvozenou pro průběh dotvarování podle (10.7) vidíme, že je jejím speciálním případem, přičemž

$$1/\psi(t) = E_K(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_K(t),\ \gamma = 1/\eta_K(t)\ \psi(t) = \text{konst} \tag{10.17a}$$

a obráceně

$$\eta_K(t) = 1/\gamma\psi(t),\quad E_K = 1/\psi(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_K(t), \tag{10.17b}$$

přičemž pro $t \to \infty$ platí $\lim E_K = 1/\psi(\infty)$, $\lim \eta_K = 1/\gamma\psi(\infty)$. Podobně jejím speciálním případem je i rovnice (10.7b). Normální model podle obr. 10.4c s časově proměnnými konstantami zobrazuje tedy průběh dotvarování podle Arutjunjana i přesný průběh dotvarování podle rovnice (2.9). (Poznámka. Jestliže $E = \text{konst}$, $E_K = \bar{q}_\infty/E = \text{konst}$, dává tento model pro $t \to \infty$ stejné hodnoty jako řešení ideálními přetvárnými moduly.)

Poznámka: Určíme-li limitu E_K pro $t \to 0$ podle (10.17b) pro Arutjunjanovu funkci $\psi = C_0 + A_1/t$, rovnice (10.7), obdržíme zápornou hodnotu $-1/A_1\gamma$, což není možné a Arutjunjanův tvar funkce ψ není tedy přípustný pro velmi mladý beton. Lze to odstranit např. zavedením funkce $\psi = C_0 + (A/t)^n$ o $n > 1$, kdy $\lim E_K = \lim \eta_K = 0$ nebo funkce $C_0 = Ae^{-\gamma_1 t}$, pro níž $E_K(0) = C_0(C_0{}^*A)$ a $\eta_K(0) = 1/\gamma(C_0 + A)$.

Model $H_1 \mid (H_2$—$N_2)$ ze tří prvků vede při časově proměnných konstantách též na rovnici 2. řádu bez členů nultého řádu, nikoliv však ekvivalentní s (10.17).

Při dalším zpřesnění bylo by vhodné pro dotvarování betonu uvažovat Burgersův model podle obr. 10.3b, který při časově proměnných konstantách vede na rovnici 2. řádu:

$$\eta_K\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial t^2} + \left(E_K + \frac{\mathrm{d}\eta_K}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\eta_K}{E_M}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial t^2} + \left[1 + \frac{\eta_K}{\eta_M} + \frac{1}{E_M}\left(E_K + \frac{\mathrm{d}\eta_K}{\mathrm{d}t}\right) + \eta_K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{E_M}\right)\right]\frac{\partial\sigma_x}{\partial t} + \left[\frac{1}{\eta_M}\left(E_K + \frac{\mathrm{d}\eta_K}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\eta_M}\right)\right]\sigma_x. \tag{10.18}$$

Řešení podle této závislosti by nebylo podstatně složitější než podle (10.7a), neboť rovnice je stejného řádu. Zjednodušeně bylo by zde možno např. uvažovat $E_K = \text{konst}$, $\eta_K = \text{konst}$ nebo aspoň $E_K/\eta_K = \text{konst}$. Pro $E_K = \text{konst}$ je průběh dotvarování při konstantním napětí zavedeném v čase τ:

$$\varepsilon_x(t,\tau) = \sigma_x(\tau)\left(\frac{1}{E_M(\tau)} + \int_\tau^t \frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta_M(\tau')} + \mathrm{e}^{F(t)}\int_\tau^t \frac{1}{\eta_M(\tau')}\mathrm{e}^{-F(\tau')}\,\mathrm{d}\tau'\right), \tag{10.19}$$

kde $F(t) = \int_{t_0}^t (E_K/\eta_K)\,\mathrm{d}\tau$.

Funkce $C(t,\tau)$ podle (10.3) má zde tvar $f(t) - f(\tau) + g(\tau)\,[h(t) - h(\tau)]$. Burgersův model je pro beton vhodný i z hlediska rozboru mikrostruktury [26a].

Vzhledem k větší složitosti řešení rovnic 2. řádu se nabízí otázka, zdali by

nebylo možno vůči předpokladům kapitoly 2 dosáhnout zpřesnění v rámci rovnic 1. řádu. Kdybychom uvažovali obecnou rovnici 1. řádu tvaru (10.14) s časově proměnnými koeficienty, zjistili bychom jejím řešením, že průběh dotvarování při konstantním napětí by musel mít tvar $\varepsilon_x(t, \tau) = \sigma_x(\tau)\,[(1/E(\tau) - F(\tau))\,\alpha(\tau)/\alpha(t) + F(t)]$, kde $E(t)$, $F(t)$ a $\alpha(t)$ jsou funkce jedné proměnné. Pro konečnost deformací musí být $\lim F$ pro $t \to \infty$ konečná (rovná limitě výrazu a_0/b_0). Aby bylo vyjádřeno dotvarování velmi starého betonu, musela by se funkce α blížit pro $t \to \infty$ k funkci $e^{b_0 t}$. Potom však konečná hodnota deformace je stejná pro všechny časy τ zavedení napětí, což pro beton nelze uvažovat. Není tedy možno dosáhnout dalšího zpřesnění vztahu ε_x a σ_x v rámci rovnic 1. řádu. (Lze ostatně ukázat, že obecnou rovnici 1. řádu s proměnnými koeficienty nelze znázornit modelem ze tří prvků.)

Pro příčné deformace lze u betonu i při přesnějších závislostech vystačit s časovým průběhem afinním podélné deformaci, a tedy s modelem stejného druhu. Hodnoty μ a μ' jsou pak konstantní. Závislost γ_{xy} a τ_{xy} plyne z podmínek izotropie též ve stejném tvaru.

Teorií lineárního dotvarování nelze ani pro napětí menší než asi 0,5 meze pevnosti vyjádřit přesně vztah dlouhodobých deformací vratných a nevratných a zejména nevratnou část deformace u velmi starého betonu. Tento nedostatek lze odstranit jedině nelineárním modelem. Nejjednodušší by bylo uvažovat lineární model, v němž při zmenšování dlouhodobé deformace se zapojí pomocí západky do akce další pružiny a tlumiče, které způsobí, že z dlouhodobých deformací je vratná jenom část. Nejjednodušší model tohoto druhu je na obr. 10.4d. Pokud dlouhodobá deformace roste, tj. pokud $\mathrm{d}\varepsilon_x/\mathrm{d}t - (1/E)\,\mathrm{d}\sigma_x/\mathrm{d}t \leqq 0$ (předpokládá se $\varepsilon_r - \sigma_x/E \leqq 0$), platí rovnice (10.17) ap. Jestliže však v čase t_a je uvedená nerovnost překročena (při hodnotách ε_{x_a}, σ_{x_a}), platí pak dále obdobné rovnice pro hodnoty $\varepsilon_v - \varepsilon_{x_a}$, $\sigma_x - \sigma_{x_a}$, avšak se změněnými konstantami, a to tak dlouho, pokud je $\partial\varepsilon_v/\partial t - (1/E)\,\partial\sigma_x/\partial t \geqq 0$ atd. Pro většinu případů stálého zatížení konstrukce (včetně relaxace napětí) by platil ve většině bodů konstrukce model se stále otevřenou západkou. Uzavření západky a přechod na druhou rovnici by prakticky nastal jen při velkém odlehčení konstrukce.

Literatura

[1] Arutjunjan, N. Ch.: Některoryje voprosy těorii polzučesti, Moskva—Leningrad 1952

[1a] Babuška I.: O rheologických vlastnostech betonu, Stavebnícky časopis 1958, č. 1, Bratislava

[2] Bažant Z., Nedoma A., Spála K.: Nauka o pružnosti a pevnosti, TP3, SNTL, Praha 1955

[3] Bažant Z., Hruban K., Klokner F.: Statika stavebních konstrukcí, Technický průvodce sv. 4, SNTL, Praha 1953

[4] Bažant Z. (ml.): Metody zakládání staveb, NČSAV, Praha 1956 (kap. 7 a 9)

[5] Bažant Z. P.: Vliv dotvarování a smršťování u staticky neurčitých konstrukcí z betonu různého stáří, Inž. stavby 1961, č. 11, str. 426, Praha

[6] Bažant Z. P.: Teorie dotvarování a smršťování betonu v nehomogenních konstrukcích a průřezech, Stavebnícky časopis 1962, č. 9, str. 552. Bratislava (zkrácený výtah stejnojmenné disertační práce, uložené v ÚTAM-ČSAV 1962)

[7] Bažant Z. P.: Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen, 7. Kongress, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau v Rio de Janeiro 1964, Vorbericht, str. 887—98

[8] Bažant Z. P.: Přibližné metody řešení dotvarování a smršťování složitějších nehomogenních konstrukcí a užití samočinných počítačů, Stavebnícky časopis 1964, č. 7, str. 414, Bratislava

[9] Bažant Z. P.: Časové spolupůsobení stavebních konstrukcí s podložím, Stavebnícky časopis 1964, č. 9, str. 542—58

[9a] Bažant Z. P.: Mathematische Ermittlung der rheologischen Eigenschaften von glasfaserverstärkten Kunststoffen, Plaste und Kautschuk, Leipzig 1965, č. 10, str. 592—99

[10] Bechyně St.: Betonové stavitelství III, sv. druhý, SNTL, Praha 1956

[11] Bechyně St.: Náprava vedlejších účinků v železobetonových konstrukcích staticky neurčitých. Sborník k 80. narozeninám akademika Kloknera, SNTL, Praha 1953

[12] Birkenmayer M.: Die Berechnung der Spannungsverluste im vorgespannten Beton, Schweizerische Bauzeitung 1952, č. 45

[12a] Boltzmann Z.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, Wiener Ber. 10, B. 70, 1874

[13] Brdička M.: Mechanika kontinua, NČSAV, Praha 1959
[14] Busemann R.: Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern, Der Bauingenieur 1950, č. 11
[15] Collatz L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin 1951, Springer
[15a] Colonetti C.: Deformazioni plastiche e deformazioni viscose, Pont. Ac. Acta, t. 6, 24
[15b] Craemer: Zusammenwirken alter und neuer Tragwerkteile, Beton u. Stahlbetonbau 1953, S. 2
[16] Dašek V.: Statika rámových konstrukcí, NČSAV, Praha 1959
[16a] Davis: Flow of concrete under sustained load, Jour. ACI, Nr. 7, 1932
[17] Dimel E.: Schrägseilbrücken aus Beton als Sonderfall vorgespannter Betonkonstruktionen, 4. Kongres, Fédération Internationale de la Précontraine, Řím, 1962, Th. II, s. 160
[18] Dischinger Fr.: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere Bogenbrücken, Bauing. 1939, str. 53—63, 286—294, 426—437, 563—572
[19] Eimer Cz.: Podstawy teorii pelzania ustrojów hiperstatycznych wstepnie sprezonych, Rozprawy inzinierske, Warszawa 1957, č. 3
[20] Faltus Fr.: Prvky ocelových konstrukcí, kap. X. 10., SNTL, Praha 1954
[21] Finsterwalder U., Knittel G.: Die neue Moselbrücke in Koblenz, Bauingenieur, 1954, č. 8
[22] Finsterwalder M.: Ergebnisse von Kriech- und Schwindmessungen an Spannbetonbauwerken, B. u. Stb. 1958/5, s. 136—144 (jako pokračování článku B. u. Stb. 1955/1, s. 44—50)
[23] Florin V. A.: Osnovy mechaniki gruntov, díl II, Gos. izd. lit. po strojit., Moskva—Leningrad 1961 (Hlava III, IV, V)
[24] Freudenthal A. M.: The inelastic behaviour of engineering materials and structures, Wiley, New York 1950
[24a] Freudenthal A. M., Geiringer H.: The mathematical theories of the inealastic continuum, Handbuch der Physik, Band VI, Springer, Berlin 1958
[24b] Freudnethal A. M., Roll, F.: Creep and creep recovery of concrete under high compressive stress, Journ. of ACI, 1958, No. 12
[24c] Freudenthal A. M.: Creep effects in the analysis of reinforced concrete structures, 5th Congress IABSE, Lisabon 1956, Prelim. Publ., str. 85
[24d] Fritz B.: Verbundträger. Berechnungsverfahren für die Baupraxis, Springer, Berlin 1961
[25] Goschy B.: Berechnung der Stahlbeton-Fertigteil-Konstruktionen verbunden an Ort und Stelle, 5er Kongress der Int. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Lisabon 1956, str. 999
[26] Grigar K.: Účinek dotlačování betonu při změně statického působení konstrukce, Inž. stavby 1955, č. 3
[26a] Hansen T. C.: Creep and stress relaxation of concrete, Stockholm 1960 (překlad Gosstrojizdat, Moskva 1963)
[26b] McHenry D.: A new aspect of creep in concrete and its application to design. Proc. 15 TM, 1946, str. 1298

[27] Hollan I.: Reologický model betonu, Stavebnícky časopis SAV, 1963/3, str. 430
[27a] Hruban K.: Teorie časového průběhu deformace plochých skořepin, Stavebnícky časopis 1964, č. 4, str. 201
[27b] Hruban I.: Vliv dotlačování a smršťování betonu na antiklastické skořepiny, Stavebnícky časopis 1964, č. 7, str. 391
[28] L'Hermite R.: Que savons nous de la déformation plastique et du fluage de béton, Annales de l'Inst. Techn. du Bat. et des Tr. Publ., No. 117, Septembre 1957, Paris
[29] Janda L.: Vliv dotlačování betonu a vliv proměny modulu pružnosti s časem na spojité nosníky betonované vývojovou metodou, Sborník věd. prací ČVUT-FIS, SNTL, Praha 1958
[30] Jendelo M.: Podružné účinky u válcových nádrží ze železového betonu, Inž. stavby 1962, str. 211
[30a] Kačanov L. M.: Teoria polzučesti, Fizmatgiz, Moskva 1960
[31] Klimeš J., Bažant Z. P.: Možnosti železničního přemostění ve městě, Sborník IV. celostátní konference o předpjatém betonu, sv. 2, str. 85, VTS, Brno 1961
[32] Klokner F., Hruban K.: Železový beton I, SNTL, Praha 1957
[32a] Kollar, Die Wirkung des Schwindens u. Kriechens des Betons auf eingerissene Stahlbetonträger, Acta technica Ac. Sc. Hung., 1956, str. 293
[33] Leonhardt K.: Předpjatý beton v praxi. SNTL, Praha 1958 (překlad z němčiny)
[34] Levi F., Pizzetti G.: Fluage-Plasticité-Précontrainte, Dunod, Paris 1951
[34a] Mamillan M. A.: A study of the creep of concrete, Bull. RILEM, 1959, No. 3
[34b] Metěljuk N. S.: Naprjaženija i deformaciji v sbornomonolitnych konstrukcijach ot usadki monolitnogo betona, Gidrotechničeskoje strojitělstvo 1961, no. 1
[35] Novák O. a kol.: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství, TP3, SNTL, Praha 1964
[35a] Olszak W. a kol.: Teoria konstrukcji sprężonych, PWN, Warszawa 1961
[36] Prokopovič J. E.: Vlijanie dlitěljnych procesov na naprjažennoje i deformirovannoje sostojanija sooruženij, Gosstrojizdat, Moskva 1963
[37] Reiner M.: Twelwe lectures on theoretical rheology, R. Mass, Jerasalem 1943 (překlad Gostechizdat, Moskva 1947)
[37a] Reiner M.: Deformation and flow, Lewis, London 1949 (překlad Moskva)
[37b] Reiner M.: Building materials, their elasticity and anelasticity, Nortj Holland, Amsterodam 1954
[37c] Reiner M.: Rhéologie théorique, Paris 1955 (přel. Warszawa 1958)
[37d] Reiner M.: Rheology, Handbuch der Physik, Band VI, Elasticity and plasticity, Springer, Berlin 1958 (překlad Nauka, Moskva 1965)
[38] Rektorys K. a kol.: Přehled užité matematiky, SNTL, Praha 1963
[38a] Ross A. D.: Creep of concrete at variable stress, Jour. ACI, No. 9, 1958
[38b] Säger W.: Der Einfluss des Kriechens und Schwindens in Spannbetonkonstruktionen, Werner, Düsseldorf 1955
[39] Ržanicyn A. R.: Někotoryje voprosy mechaniki sistěm deformirujuščichsja vo vremeni, Moskva—Leningrad 1949
[39a] Rühle U.: Die Ermittlung der Zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundkonstruktionen aus Stahlbeton mit Ortsbeton, Baupl.-Bautech., Nr. 10, 1954

[40] Sattler K.: Theorie der Verbundkonstruktionen, Verlag W. Ernst, Berlin 1953
[41] Schleicher F. a spol.: Taschenbuch für Bauingenieure, Springer, Berlin 1955, překl.: Příručka pro stavební inženýry, SNTL, Praha 1960
[42] Silveira I.: On consolidation of an underplaced clay layer support of statically indeterminated structures, Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Soil Mechanics and Found. Eng., Rotterdam 1948, Vol. II, str. 12
[43] Sobotka Z.: Teorie plasticity, NČSAV, Praha 1954
[44] Stěpanov V. V.: Kurs diferenciálních rovnic, Praha 1952. Přír. vyd. (překlad z ruštiny)
[45] Stüssi F.: Zur Relaxation von Stahldrähten, Abhandlungen, Int. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, 1959, str. 273
[46] Svida W.: Zum Kriechproblem der in zwei Richtungen vorgespannten Platten und Scheiben, Abhandlungen, Int. Vereigung für Brückenbau und Hochbau, 1956, str. 469
[47] Szalai J.: Über den Einfluss des Kriechens und Schwindens bei an Ort mit Stahlbeton verstärken Spannbetonträgern, 4. Kongr. FIP, Řím 1962, Th. 1, S. 75
[48] Timoshenko S., Theory of elasticity, McGraw Hill, New York 1954
[49] Ulickij I. I. a kol.: Rasčot železobetonnych konstrukcij s učetom dlitělnych procesov, Gosstrojizdat, Kijev 1960
[50] Ulickij I. I., Čan Užun Jao; Ustojčivosť centralno sžatych elementov pri dlitělnom dějstvii nagruzki, Beton i železobeton 1963, č. 3, str. 135
[51] Vojtěch J.: Základy matematiky I, Praha 1959, SNTL, 5. vyd.
[51a] Volterra W.: Leçon sur les fonction des lignes, 1913
[51b] Weil G.: Influance des dimensions et des contraintes sur le retrait ef le fluage du béton, Bull. RILEM, No 3, 1959
[52] Whitney G. S.: Plain and reinforced concrete arches, Journ. Amer. Concr. Inst., Nr. 7, 1932
[52a] Wippel H.: Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Springer, Berlin 1963
[53] Terzaghi K., Fröhlich O. K.: Theorie der Setzung von Tonschichten, Franz Deuticke, Leipzig—Wien 1936
[54] Zůda K.: Navrhování konstrukcí z předpjatého betonu, SNTL, Praha 1958

KNIŽNICE stavební aktuality

Inž. Zdeněk P. Bažant, CSc.

DOTVAROVÁNÍ BETONU PŘI VÝPOČTU KONSTRUKCÍ

DT 624.012.4

Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, n. p., Spálená 51, Praha 1, v roce 1966 jako svou 5618. publikaci v řadě stavební literatury — Redakce stavební literatury — Odpovědný redaktor Ing. Zdeněk Schwarz — Obálku navrhl Zbyněk Weinfurter — Grafická úprava a technická redakce Antonín Kalina — Vytiskl TISK, knižní výroba, n. p., Brno, provoz 1 — 188 stran, 35 obrázků, 7 tabulek, — Typové číslo L17-B3-IV-41/7791/IV — Vydání první — Náklad 2 200 výtisků 10,98 AA, 11,35 VA — D-15*60052

05/77

Cena brožovaného výtisku Kčs 11,00 — I.

Publikace je určena projektantům betonových konstrukcí, vědeckým pracovníkům ve výzkumných ústavech a jako vysokoškolská studijní pomůcka

04-710-66 Kčs 11,00 — I.