

Určení ztrát předpětí třením zakřivených kabelů podle jejich protažení při napínání

Proměnlivost koeficientu tření kabelů. Pracovní diagram patentovaných drátů a návrh jeho linearizace v oboru provozních napětí. Proměnlivost protažení drátů při stejném napětí. Početní určení koeficientu tření podle absolutního a poměrného protažení, změřeného při napínání. Použití při posouzení skutečných ztrát třením na stavbě. Číselný příklad. Zmenšení ztrát třením vhodným návrhem tvaru kabelů.

Ztráty předpětí třením kabelů v zakřivených kabelových kanálcích mívají značný podíl na celkových ztrátách předpětí. Jejich velikost je však proměnná v závislosti na různých vlivech, jež nelze předem přesně stanovit. Přesto ale zajištění bezpečnosti konstrukcí z předpjatého betonu nutně vyžaduje nějaké kritérium, podle něhož by bylo možno aspoň dodatečně, tj. na stavbě jednoduše určit, zda ztráty třením nejsou větší, než bylo předpokládáno ve výpočtu, a v případě, že tomu tak je, o kolik je nutno zesílit výztuž nebo – co je nežádoucí – snížit zatížení či únosnost.

Koeficient tření kabelů v trubce je ovlivněn uspořádáním drátů v příčném řezu kabelu, tvrdostí a nerovnostmi povrchu drátů a trubek a podstatně též zrezivěním jejich povrchu. Pro představu uveďme výsledky měření inž. Horela, který u drátů, které měly v nezrezivěném stavu v silnostěnné trubce koeficient tření 0,19, zjistil při zrezivěném povrchu koeficient 0,39 a při současně zrezivělé trubce dokonce 0,64. Samotný rez trubky při hladkém povrchu drátů neměl však podstatný vliv. Koeficient tření kolísá tedy ještě více, než jak uvádí norma ČSN 73 2004, udávajíc hodnoty 0,20 až 0,30.

Na první pohled se nabízí stanovit na stavbě ztráty třením kabelů podle protažení drátů, jaké se objeví při napínání, neboť toto protažení lze snadno změřit. Věc však komplikuje jednak to, že protažení patentovaných drátů při stejném napětí je proměnlivé, tj. že pracovní křivky různých drátů nejsou totožné, ale náhodně odlišné (proměnný sečnový modul pružnosti), a dále též to, že protažení drátů v závislosti na napětí nelze vyjádřit Hookeovým zákonem, neboť obor provozních napětí je u předpínacích kabelů blízký mezi průtažností, kde pracovní diagram je již značně zakřivený. Je to patrné z obr. 1, kde je uveden pracovní diagram ze zkoušky tří různých drátů \varnothing P 7 mm, změřený inž. Horelem, a to a) diagram pro prvé napnutí drátů a b) diagram pro druhé napnutí drátů po předchozím zlepšení napnutí na druh průtažnosti a odlehčením. Při prvním napnutí je podstatně větší rozptyl pracovních křivek.

Přestože pracovní diagram drátů je vysloveně nelineární, lze jej pro výpočet přetvoření v oboru provozních napětí

linearizovat, jak je naznačeno na obr. 2. Je to opodstatněno tím, že obor provozních napětí drátů je poměrně úzký neboli provozní napětí drátů v nosnicích se mění v úzkém rozsahu, jen asi od 0,7 do 1,0 σ_p , a v době napínání, kdy se uplatňuje tření, nejvýše od 0,8 do 1,0 σ_p , kde σ_p značíme napětí na zaručené nejmenší mezi průtažnosti podle ČSN 73 2004, tab. I. Přímkou linearizující pracovní diagram vedeme body, odpovídajícími napětím ca 0,85 σ_p a 0,95 σ_p , neboť se pak velmi dobře přimyká k pracovnímu diagramu v oboru napětí od 0,8 do 1,0 σ_p . Pro napětí menší než 0,7 σ_p nelze však již této přímky použít. Zmíněná přímka vytíná na ose σ úsek, odpovídající napětí, jež označíme η (obr. 2). V uvedeném oboru napětí je pak závislost poměrných protažení ε_a na napětích σ_a drátů dána vztahem

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a - \eta}{E_a}, \quad \text{pro } \sigma_a > 0,7 \sigma_p \quad (1)$$

kde E_a značí modul pružnosti, odpovídající této přímce. Hodnota η představuje jistou míru zakřivení pracovního diagramu. Hookeův zákon je speciálním případem rovnice (1), kdy $\eta = 0$.

Navržená linearizace se liší od Hookeova zákona zaváděného v ČSN 73 2004 pro napětí až do σ_p tím, že má nenulový absolutní člen η a neprochází počátkem. Přitom v oboru provozních napětí se přimyká daleko lépe ke skutečné křivce a v dalším se přesvědčíme, že není ani o nic komplikovanější. Je to důsledek toho, že obor provozních napětí je u předpjatých drátů poměrně velmi úzký.

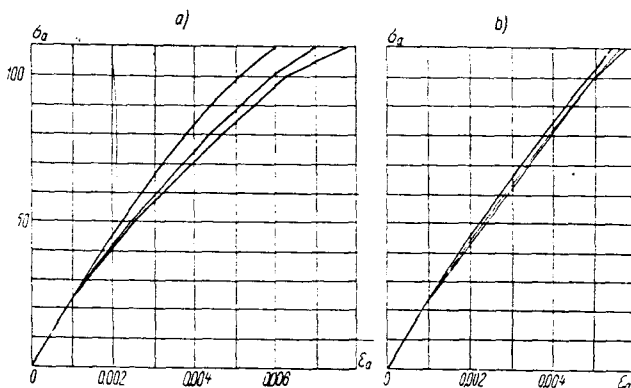
Vliv proměnlivosti protažení patentovaných drátů při stejném napětí (proměnnost modulu E_a), jež může podle zkoušek inž. Horela (obr. 1) činit až 30%, je nutno při určení ztrát třením vyloučit. Podaří se to, zavedeme-li zjednodušující předpoklad, že u drátů s různou pracovní křivkou zůstává aspoň hodnota η v poměru k mezi pružnosti σ_p stálou. Je to graficky znázorněno na obr. 3. Předpokládáme tím vlastně, že pracovní diagramy jsou přibližně afinní podle osy σ . Při prvním napínání drátů lze v diagramu podle obr. 1a přibližně odvodit, že $\eta \approx 0,25 \sigma_p$ a při druhém napínání z obr. 1b $\eta \approx 0,10 \sigma_p$.

Napětí v zakřiveném kabelu je dáno známým vztahem

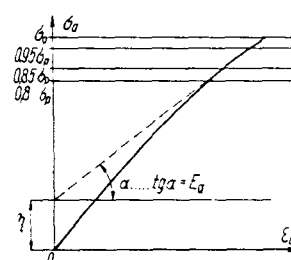
$$\sigma_a(x) = \sigma_{ak} e^{-fx} \quad (2)$$

nebo přibližně

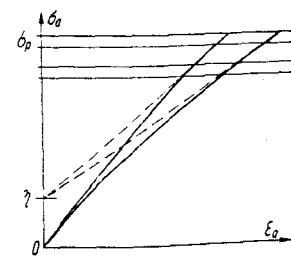
$$\sigma_a(x) = \sigma_{ak} (1 - fx) \quad (2a)$$



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

bulka I.

dílek	Δs_i	$\Delta \alpha_i$	α'_i	$\alpha''_i \Delta s_i$
1-2	5,5 m	0	0	0
2-3	1	0,0583	0,0291	0,0291
3-4	6	0	0,0583	0,350
4-5	1	0,100	0,1083	0,1083
5-6	6	0	0,1583	0,950
6-7	1	0,200	0,2583	0,2583
7-8	6	0	0,3583	2,15
8-9	1	0,100	0,4083	0,4083
9-10	2,5	0	0,4583	1,145
		$\alpha = 0,458$	$\sum_i \alpha_i \Delta s_i = 5,34$	

kde pro hodnoty $f\alpha < 0,2$ je chyba menší než 2,5 %. V těchto vzorcích značí α celkový úhel zakřivení kabelu, měřený od napínané kotvy, σ_a (α) napětí kabelu v místě, jež odpovídá úhlu α , σ_{ak} dané napětí pod kotvou, podle něhož se určí tlak na manometru lisu přiřčením ztrát třením v lisu a v kotvě, a f koeficient tření kabelu v kabelových kanálcích. O koeficientu f předpokládáme, že je podél kabelu neměnný.

Vyjádříme napřed protažení Δl kabelu délky l v závislosti na koeficientu tření f .

a) Uvažujme napřed kabel, který se napíná z jedné strany.

Při obecné závislosti $\epsilon_a = F(\sigma_a)$ poměrného protažení ϵ_a na napětí σ_a můžeme podle rovnice (2) napsat

$$\Delta l = \int_{s=0}^l F(\sigma_a) ds = \int_{\alpha=0}^{\alpha} F(\sigma_{ak} e^{f\alpha}) ds \quad (3)$$

Tento integrál je vhodné nahradit přibližně sumací po dílcích. Dosadíme-li z přibližného vzorce (2a), dostaneme

$$\Delta l = \sum_i F[\sigma_{ak}(1-f\alpha_i)] \Delta s_i \quad (3a)$$

kde s značí délku kabelu mezi určitým místem kabelu a napínanou kotvou, Δs_i délku i -tého dílku kabelu, α_i celkový úhel zakřivení kabelu od napínané kotvy až ke středu tohoto dílku. Z hlediska přesnosti je vhodné volit délky přibližně kruhové nebo přímkové.

Při obecně dané funkci $\epsilon_a = F(\sigma_a)$ nelze z rovnice (3a) explicitně vypočítat f . Je to možné provést jediné zkusmo interpolacemi. Proto je nutno užít lineárního zjednodušení pracovního diagramu podle rov. (1), čímž z rov. (3a) obdržíme

$$\Delta l = \sum_i \frac{\sigma_{ak}(1-f\alpha_i) - \eta}{E_a} \Delta s_i$$

čili

$$\Delta l = \frac{\sigma_{ak}}{E_a} \left[\left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right) l - f \sum_i \alpha_i \Delta s_i \right] \quad (4)$$

Z této rovnice plyne

$$f = \frac{\left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right) l - \frac{E_a}{\sigma_{ak}} \Delta l}{\sum_i \alpha_i \Delta s_i} \quad (5)$$

Označme nyní $\bar{\Delta l}$ protažení, které by měl tentýž kabel,

kdyby byl přímý, tj. $\bar{\Delta l} = \frac{\sigma_{ak} - \eta}{E_a} l$. Pak vychází

$$f = \frac{l}{\sum_i \alpha_i \Delta s_i} \left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right) \left(1 - \frac{\Delta l}{\bar{\Delta l}}\right) \quad (6)$$

Vypočteme-li takto hodnotu koeficientu tření f , můžeme již snadno podle rov. (2) určit skutečnou hodnotu ztrát třením kabelů.

b) Pro kabel napínaný s obou stran lze podobně jako vzorec (4) odvodit

$$\Delta l = \frac{\sigma_{ak}}{E_a} \left[\left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right) l - f \left(\sum_i \alpha'_i \Delta s_i + \sum_j \alpha''_j \Delta s_j \right) \right] \quad (7)$$

kde i značí délky vlevo od úhlového středu kabelů, které jsou napínány lisem od levé kotvy, a j délky vpravo od úhlového středu kabelů, které jsou napínány lisem od pravé kotvy, α'_i značí celkový úhel zakřivení kabelu od levé kotvy ke středu i -tého dílku, α''_j úhel zakřivení kabelu od pravé kotvy ke středu j -tého dílku. Označíme-li opět $\bar{\Delta l}$ protažení, jež by měl přímý kabel délky l , dostaneme

$$f = \frac{l}{\sum_i \alpha'_i \Delta s_i + \sum_j \alpha''_j \Delta s_j} \left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right) \left(1 - \frac{\Delta l}{\bar{\Delta l}}\right) \quad (8)$$

V projektu nebo na stavbě před napínáním můžeme vypočítat protažení Δl_p $\bar{\Delta l}_p$ podle vzorce (4) nebo (7) a (1), odpovídající předpokládaným hodnotám modulu pružnosti E_{ap} a koeficientu tření f_p (podle normy). Pomocí těchto hodnot můžeme skutečný koeficient tření f vypočítat po napnutí kabelu z jednoduchého a názorného vzorce

$$f = \frac{1 - \frac{\Delta l}{\bar{\Delta l}}}{1 - \frac{\Delta l_p}{\bar{\Delta l}_p}} f_p \quad (9)$$

jenž plyne z rov. (6) nebo (8) pro kabel napínaný z jedné i obou stran.

Ze vzorce (9) vidíme, že k určení skutečného koeficientu tření f a tím i skutečných ztrát předpětí třením je nutno při napínání určit měřením dvě hodnoty, a to jednak protažení Δl daného křivého kabelu délky l , jednak protažení $\bar{\Delta l}$, které by měl tentýž kabel, kdyby byl přímý za jinak stejných podmínek.

Protažení Δl kabelů je možno změřit např. tak, že na dráty upevníme na vnějších koncích těsně před kotvou nějakou rysku a změříme její posun. Pro praxi vhodnější však je určovat Δl podle zdvihu lisu, který lze přímo odčítat. Grafikon závislosti protažení Δl na zdvihu lisu je nyní předmětem měření inž. Horela. Tato závislost není jednoduchá a vystupuje v ní řada veličin.

Protažení $\bar{\Delta l}$ odpovídající přímému kabelu můžeme určit tak, že dilatometrem, nejlépe mechanickým s hodinovým ukazatelem, změříme poměrné protažení drátů na vnějším konci drátů před kotvou. Od něho pak odečteme procento ztrát třením v kotvě a získané poměrné protažení znásobíme délkou l . Procento ztrát třením v kotvě (v kotvě objímce) je přitom nutno uvažovat stejné, jako při výpočtu tlaku na manometru, nutného k dosažení napětí σ_{ak} pod kotvou. Kdybychom toto procento uvažovali jen málo odlišné, vznikla by ve výsledku velká chyba.

Též by bylo možno určit protažení $\bar{\Delta l}$ podle protažení přímých kabelů téhož nosníku, což je však méně přesné, poněvadž se může uplatnit proměnný modul pružnosti drátů.

Určení skutečného procenta ztrát předpětí třením není kontrolou skutečného napětí drátů. K tomu je ještě zapotřebí, aby manometr ukazoval správně. Přibližnou kontrolou údaje manometru je protažení kabelu, které musí zhruba odpovídat modulu pružnosti.

K výpočtu koeficientu tření f je třeba znát hodnotu výrazu $\left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right)$. Při prvním napínání drátů je přibližně roven 0,74, při druhém napínání asi 0,91.

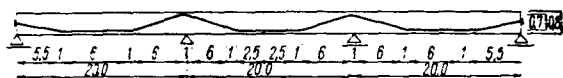
Před druhým napínáním po předchozím zlepšení meze průtažnosti prvním napnutím se však většinou neodlehčuje kabel až na nulu, ale na nějaké napětí σ_{az} . Potom je nutno protažení Δl a $\overline{\Delta l}$ kabelů měřit od napětí σ_{az} . Počátečnímu napětí σ_{az} odpovídá hodnota η_z jakožto úsek mezi přímkou v obr. 2 a napětím σ_{az} na svislici vedené odpovídajícím protažením. Za výraz $\left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right)$ je pak nutno dosazovat menší hodnotu, a to při $\sigma_{az} = 0,1 \sigma_p$ asi 0,92 a při $\sigma_{az} = 0,4 \sigma_p$ asi 0,97. I když při druhém napínání odlehčujeme až na nulu, je vhodné měřit protažení od určitého malého napětí, asi $0,1 \sigma_p$, neboť i odlehčený drát může být za zakřiveními vlivem tření mírně napjatý, takže počáteční protažení by neodpovídalo rovnici (2).

Teoreticky existuje též možnost měřit rozdíly protažení pro dvě blízká napětí, mezi nimiž by bylo lze pokládat pracovní diagram za přímkový, pro nějž výraz $\left(1 - \frac{\eta}{\sigma_{ak}}\right)$ se rovná 1. Extrapolací z malého intervalu by se však měření stalo neúnosně nepřesným.

Určením skutečných ztrát předpětí třením prověříme správnost projektových předpokladů jejich výpočtu. Dostaneme-li $f > f_p$, je nutno posoudit, zda konstrukce vyhovuje i pro hodnotu f , a když nevyhovuje, určit kolik je nutno přidat kabelů nebo v nejhorším o kolik se musí snížit zatížení či únosnost. Dostaneme-li $f < f_p$, je případně možno snížit počty kabelů nebo drátů, vyhoví-li však průřezy též na mezi únosnosti.

Při posouzení napětí v projektu obvykle počítáme s průměrnými hodnotami ztrát předpětí, které určujeme buď pro jediný ideální kabel, který probíhá v každém průřezu těžišti všech kabelů, nebo jako průměr z několika ideálních kabelů, z nichž každý probíhá těžišti příslušné skupiny kabelů. Pro porovnání s těmito hodnotami je nejvhodnější ze změřených protažení stanovit průměrné protažení všech kabelů nebo skupin kabelů a dále postupovat pro ideální kabel či kabely podle stejných vzorců.

Pro názornost ukažme praktický postup na **číselném příkladě**. Uvažujme spojitý nosník o třech polích po 20,0 m, předpjatý průběžným kabelem podle obr. 4. Kabel z 24 \varnothing P.7 se napíná oboustranně na 11,5 t/cm² po předchozím zlepšení. Úhlový střed kabelu je uprostřed středního pole



Obr. 4.

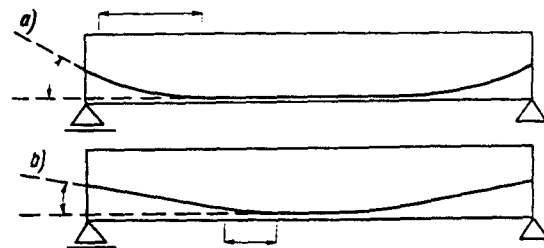
a celkové zakřivení mezi kotvou a tímto bodem činí $26^{\circ}20'$, čili $\alpha = 0,458$, čemuž při $f = 0,30$ odpovídají ztráty předpětí 13,8 %.

Kabel rozdělíme na dílky (obr. 3), tvořené přímými a kruhovými částmi. V tab. I vypočteme hodnotu $\sum \alpha_i \Delta s_i$, která je vzhledem k souměrnosti stejná s hodnotou $\sum \alpha'_j \Delta s'_j$.

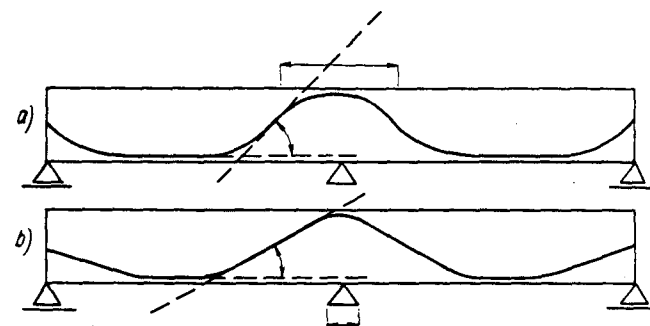
Protažení kabelů je výhodnější měřit až při druhém napínání. Pro interval napětí od 1,0 t/cm² do 11,5 t/cm² bylo změřeno protažení kabelu na jedné straně 11,06 cm a na druhé straně 17,82 cm, což dává celkem

$$\Delta l = 11,06 + 17,82 = 28,88 \text{ cm}$$

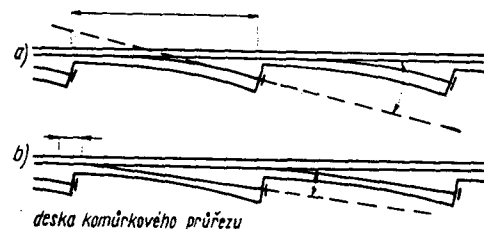
Hodinkovým dilatoměrem bylo změřeno protažení délky 10,0 cm drátů na lisu 0,0517 cm. Předpokládejme, že při



Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.

výpočtu tlaku na manometru, nutného k dosažení napětí σ_{ak} pod kotvou, byly uvažovány ztráty v kotvě hodnotou 3,0 %. Pro přímý kabel pak dostáváme

$$\overline{\Delta l} = 0,517 (1 - 0,300) \frac{6000}{10} = 30,1 \text{ cm}$$

Podle vzorce (8) je

$$f = \frac{60,0}{5,34 + 5,34} 0,97 \left(1 - \frac{28,88}{30,1}\right) = 0,22$$

což je méně než 0,30. Ztráty třením uvažované v projektu nebudou tedy překročeny.

Předpokládejme, že však byla změřena např. protažení kabelů 16,78 cm na jedné straně a 9,84 cm na druhé straně, tedy celkem 26,62 cm.

Pak je

$$f = \frac{60,0}{5,34 + 5,34} 0,97 \left(1 - \frac{26,62}{30,1}\right) = 0,63$$

Tato hodnota tření je daleko větší než hodnota předpokládaná normou ($f \leq 0,30$). Nevyhoví-li napětí průřezu, je nutno provést nějakou sanaci.

Při měření protažení kabelů je třeba značné přesnosti s chybou nejvýše 0,5 %, poněvadž rozdíl protažení přímých a křivých kabelů, z něhož plyne hodnota f , je řádově menší než celkové hodnoty protažení. To znamená, že při měření poměrných protažení hodinkami na odměrné délce 10 cm je třeba změřit protažení délky 10 cm s přesností nejméně 0,005 mm a při měření protažení kabelů za celkového protažení 10 cm s přesností 0,5 mm. Tyto přesnosti jsou dosažitelné.

Na první pohled by se mohlo zdát, že malá chyba v procentu ztrát třením v kotvě – kterážto hodnota může být dosti proměnlivá – působí velkou chybu ve výsledku. Zjistíme však, že tomu tak není, uvědomíme-li si, že procento ztrát třením v kotvě vystupuje také při určení tlaku na manometru, takže hodnoty Δl a $\bar{\Delta l}$ se při změně procenta ztrát v kotvě změní přibližně ve stejném poměru.

Rozdíl protažení Δl a $\bar{\Delta l}$ a tím i přesnost určení f je větší u kabelů, jejichž zakřivení jsou větší a blíže u kotev nebo jejichž tření je větší. Určení f je přitom významné právě u kabelů s velkou křivostí.

Určení skutečných ztrát třením je nejdůležitější u konstrukci, kde se vyskytují značně křivé kabely, jako je tomu

u dlouhých spojitých nosníků a rámu a zejména půdorysně křivých mostů.

Ztráty třením jsou mnohdy podstatnou částí celkových ztrát předpětí a způsobují pak značnou nevhodnost ve využití oceli. Proto snaha o jejich omezení musí začínat již v projektu. Je nutno navrhovat kabely s nejmenšími možnými celkovými úhly zakřivení.

Tato tendence nebývá však v praxi dostatečně uplatňována. Projektanti se totiž snaží navrhovat kabely v pokud možno plynulých obloucích velkých poloměrů (obr. 5a, 6a, 7a), obvykle 20 až 50 m, což je nevhodné z hlediska ztrát třením. Radiální síly jsou sice malé, avšak zbytečně, neboť nosníky lze směrem do masy nosníku zatížit mnohem většími radiálními tlaky, než jaké se vyskytují při takovémto tvaru kabelů. Použijeme-li minimálních možných poloměrů zakřivení (podle ČSN 73 2004 asi 3 až 6 m), dosáhneme značného snížení celkových třecích úhlů kabelů (asi o 30 až 40 %). Je to patrné z obr. 5, 6, 7, kde kabely b) mají značně menší ztráty třením než kabely tvaru a), dosud obvykle navrhovaného (kóty v obrázcích označují délky zakřivení). Zmenšení ztrát třením představuje úsporu předpínací výztuže.