Beitrag zur Differenzenlösung schiefer Platten und eine neue Art der Relaxationsmethode Teil I

Dipl.-Ing. Zdenek P. BAŽANT, Dopravoprojekt Prag, Projektierungsbüro des Straßenwesens

Die Berechnung einer schiefen Platte kann ebenso wie eine Reihe anderer Aufgaben der Praxis als sogenannte Randaufgabe formuliert werden, d. h. als Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit gegebenen Randbedingungen. Eine exakte Lösung dieser Aufgabe erwies sich bisher als unausführbar. Dem Ingenieur genügt jedoch eine Näherungslösung.

Im folgenden soll die Lösung mit der Differenzenmethode unter Zuhilfenahme eines Gitters behandelt werden, wobei das entstandene System von linearen Gleichungen mit der Relaxationsmethode berechnet wird. Die Betrachtungen beziehen sich hauptsächlich auf komplizierte Fälle schiefer Platten mit freien Rändern.

DK 624.04:624.073.126

Die Abhandlung verfolgt den Zweck, erstens eine neue und geeignete Methode für die Differenzenausdrückung der Differentialoperatoren zu zeigen (besonders der Randbedingungen des freien Randes und der Zusammenstellung der resultierenden Randoperatoren bei einem Dreieckgitter) und zweitens auf die Art und Vorteile der Anwendung einer vom Autor vorgeschlagenen Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied hinzuweisen, die die Konvergenz des Relaxationsprozesses wesentlich beschleunigt und für die Relaxationslösungen verschiedener technischer Aufgaben vorteilhafter ist.

Abschließend wird ein konkretes Beispiel einer Platte zahlenmäßig gelöst, die auf zwei parallelen Rändern gelenkig und auf den übrigen zwei Rändern frei gelagert ist und die durch eine in der Mitte wirkende Einzellast oder gleichmäßig verteilt belastet ist.

Randaufgabe

Die Durchbiegungsfläche der Platte wird in rechtwinkligen Koordinaten durch die partielle Differentialgleichung

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \tag{1}$$

mit den Randbedingungen beschrieben, die der Auflagerungsart der Platte zu entsprechen haben [3], [8]. Dabei wird mit w die Durchbiegungsordinate, mit p die Belastung pro Flächeneinheit, mit $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$ den biharmonischen Operator und mit $D = \frac{E\, d^3}{12\,(1-\mu^2)}$ die Plattenkonstante bezeichnet.

μ bedeutet die Poissonsche Zahl und d die Plattendicke.

Liegt der Rand parallel zur x-Achse und senkrecht zur y-Achse, so ergeben sich die Randbedingungen für einen Punkt des geraden Plattenrandes wie folgt [3], [6], [9]:

1. Gelenkauflagerung:

$$w = 0\,, \quad (2.1) \qquad w_{yy} = 0\,. \quad (2.2)$$

2. Einspannung:

$$w = 0\,, \quad (3.3) \qquad w_{y} = 0\,. \quad (3.4)$$

3. Freier Rand mit Bordträger, dessen Steifigkeit $E_1 J_1$ und dessen Belastung pro Längeneinheit q beträgt [6]:

$$\mu\, w_{xx} + w_{yy} = 0\,, \tag{4.1}$$

$$-(2-\mu)\, w_{xxy} - w_{yyy} + \frac{E_1 J_1}{D}\, w_{xxxx} = \frac{q}{D}\,. \tag{4.2}$$

Differenzenoperatoren des Dreiecksgitters

Zur Differenzenlösung schiefer Platten kann man verschiedene Gitterarten verwenden, wie dies besonders *Jensen* [6] sehr ausführlich behandelt hat. In manchen Fällen, so auch in dem unten angegebenen praktischen Beispiel, läßt sich vorteilhaft ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken anwenden. Zunächst müssen die Differenzenausdrücke der benötigten Differentialoperatoren abgeleitet werden. Dies kann man z. B. derart vornehmen, daß man vorerst differenzenweise die Grundableitungen des 1. und 2. Grades ausdrückt und daß man sie dann auf diese Differenzenoperatoren wiederholt anwendet. Das bedeutet, daß z. B. der biharmonische Operator durch wiederholte Anwendung der harmonischen Differenzenoperation auf die Differenzenform des harmonischen Operators gewonnen wird, wie dies beispielsweise *Jensen* [6] durchführt.

Im ersten Teil dieser Arbeit soll nachgewiesen werden, daß eine vorteilhaftere Form der Differenzenoperatoren im Dreieckgitter durch direkte Ableitung der Operatoren aus den Taylorschen Entwicklungen gewonnen werden kann. Zu diesem Zweck ist es notwendig, eine Sterngruppe der Gitterpunkte nach Bild 1 zu

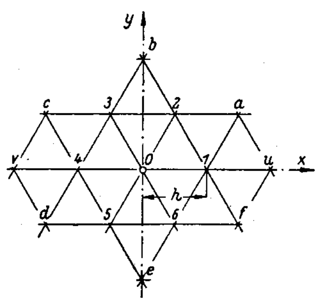


Bild 1

Sterngruppe der Gitterpunkte

wählen. Hier sind die Koordinatenachsen x, y eingeführt und die Gitterseite mit h bezeichnet. Schreibt man für den Punkt k mit den Koordinaten x_k und y_k die Taylorsche Entwicklung der Funktion w zum Ausgangspunkt der Koordinaten an, so erhält man:

$$\begin{aligned} w_k = w_0 &+ x_k w_x + y_k w_y + \frac{1}{2}\left(x_k^2 w_{xx} + 2\, x_k y_k w_{xy} + y_k^2 w_{yy}\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(x_k^3 w_{xxx} + 3\, x_k^2 y_k w_{xxy} + 3\, x_k y_k^2 w_{xyy} + y_k^3 w_{yyy}\right) \\ &+ \frac{1}{24}\left(x_k^4 w_{xxxx} + 4\, x_k^3 y_k w_{xxxy} + 6\, x_k^2 y_k^2 w_{xxyy}\right. \\ &\left. + 4\, x_k y_k^3 w_{xyyy} + y_k^4 w_{yyyy}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Hier bedeuten w_y, w_{xx}, w_{xyy} usw. die Derivationswerte im Ausgangspunkt.

Wenn man in Gl. (5) die Koordinaten für die Sterngruppe $1, 2, \cdots 6, a, b, \cdots f$

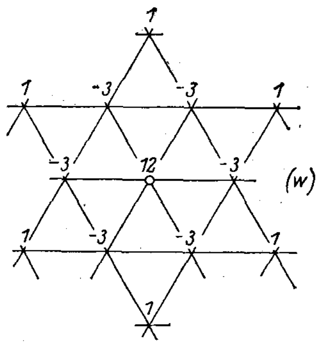
$$1 \equiv (h, 0); \quad 2 \equiv \left(\frac{1}{2} h,\ \frac{1}{2} h\sqrt{3}\right); \cdots f \equiv \left(\frac{3}{2} h,\ -\frac{1}{2} h\sqrt{3}\right) \tag{6}$$

einsetzt, so erhält man auf diese Weise nach und nach die zwölf Taylorschen Entwicklungen für die Funktionswerte w_1, w_2, $\cdots w_a$, w_b, $\cdots w_f$.

Die Differenzenausdrückung des Operators ∇^4 führt man nach *Collatz* [4] so durch, daß man aus diesen Werten den Ausdruck entwickelt:

$$12\,w_0 - 3\,(w_1 + w_2 + \cdots + w_6) + w_a + w_b + \cdots w_f$$
$$= \frac{9}{16}\,h^4\,\nabla^4\,w + \cdots \qquad (7)$$

Nach der ziffernmäßigen Entwicklung der rechten Seite wird der biharmonische Operator direkt erhalten. Wenn man in diese Gleichung, die den Operator ∇^4 bestimmt, $\nabla^4 w$ entsprechend Gl. (1) einsetzt, wird für einen bestimmten Punkt die Differenzengleichung des Gleichgewichts erhalten, die symbolisch in der Form der Sterngruppe angeschrieben werden soll:



$$(w) = \frac{9}{16}\,\frac{ph^4}{D} \qquad (8.1)$$

Dieser Operator ist für die Anwendung geeigneter als der von *Jensen* [6, Gl. 98] verwendete Operator mit den Koeffizienten 42, — 10, 2, — 1, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Sterngruppe des von *Jensen* verwendeten Operators umfaßt sechs Punkte mehr, und die Koeffizienten sind größer; das wirkt sich besonders ungünstig bei der Anwendung der sukzessiven Methoden aus.

2. Der Rest auf der rechten Seite der Gl. (8.1) erhält die Form einer unendlichen Reihe, deren erstes Glied von sechster Ordnung ist und nach *Collatz* [4] den Wert

$$-\frac{h^6}{128}\left(7\,\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 39\,\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\,\partial y^2} + 9\,\frac{\partial^6 w}{\partial x^2\,\partial y^4} + 9\,\frac{\partial^6 w}{\partial y^6}\right)\ (x, y)$$
$$x = 0,\ y = 0$$

besitzt. Beim Operator nach *Jensen* kann der Wert dieses Gliedes sechster Ordnung in der Form

$$+\frac{h^6}{128}\left(38\,\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 108\,\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\,\partial y^2} + 108\,\frac{\partial^6 w}{\partial x^2\,\partial y^4} + 36\,\frac{\partial^6 w}{\partial y^6}\right)\ (x, y)$$
$$x = 0,\ y = 0$$

abgeleitet werden. Es ist also, was die absolute Größe anbelangt, einigemal größer. (Wenn man auf der rechten Seite der Jensenschen Differentialgleichung eine bestimmte Sterngruppe der Belastungsglieder an Stelle des Belastungsgliedes im Punkte 0 annehmen würde, wie dies *Collatz* macht, könnte man bei diesem Operator den Rest auf die achte Ordnung herabsetzen [4]. Die Gleichungen sind aber dann komplizierter.)

Bei Belastung durch eine Einzellast P im Knotenpunkt des Gitters ersetzt man die Wirkung der Last P mit einer gewissen Annäherung durch eine gleichmäßige, auf der Fläche des schraffierten Sechsecks (Bild 2) wirkenden Belastung q, deren Resultierende der Einzellast P entspricht. Dieses Sechseck hat seinen Mittelpunkt im Knoten des Gitters, die Ecken sind die Mittelpunkte der Gitterdreiecke, und die Fläche hat die Größe $F = h^2\sqrt{3}/8$.

Nachdem $p = P/F$ in Gl. (8.1) eingesetzt ist, erscheint die rechte Seite dieser Gleichung, d. h. das Belastungsglied Z, in der Form:

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{P\,h^2}{D}\,. \qquad (8.2)$$

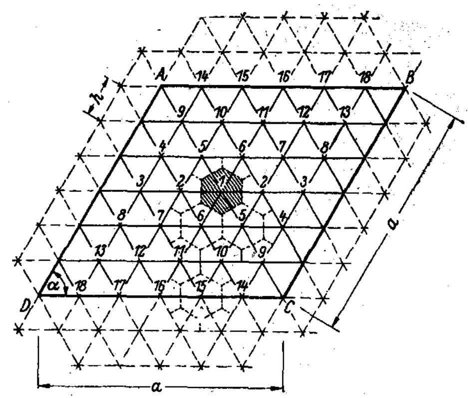


Bild 2. Platte des Zahlenbeispiels mit dem eingeführten Dreiecksgitter

Ferner wird die Gl. (4.1) des freien Randes für den Fall ausgedrückt, daß der Rand in Bild 1 mit der x-Achse identisch ist und die Platte unterhalb der Platte liegt. Bei Zusammenstellung des Differenzenausdrucks aus der Taylorschen Entwicklung benutzt man mit Vorteil die einfache Behauptung, daß bei seiner Differenzenform dieselben Eigenschaften erwartet werden können, wenn ein Differentialoperator gegenüber der Transformation der Koordinatenachsen bei Symmetrie nach irgendeiner Achse unveränderlich ist, ferner wenn er bei der Transformation das Vorzeichen ändert oder wenn er gegenüber jeder Drehung der Koordinatenachsen invariant ist. Hier wird die Symmetrie des Differenzenausdrucks zur x- und zur y-Achse erwartet. Deshalb werden aus Gl. (5) durch Einsetzung entsprechend Gl. (6) die Ausdrücke

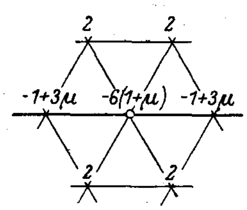
$$w_2 + w_3 + w_5 + w_6 = 4\,w_0 + \frac{1}{2}\,h^2\,(w_{xx} + 3\,w_{yy}) + \cdots \qquad (9)$$

$$w_1 + w_4 = 2\,w_0 + h^2\,w_{xx} + \cdots \qquad (10)$$

gebildet. Multipliziert man die Gl. (9) mit 2 und Gl. (10) mit dem Faktor $(3\,\mu - 1)$ und addiert dann beide, so erhält man:

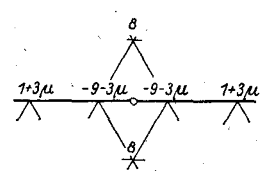
$$3\,h^2\,(\mu\,w_{xx} + w_{yy}) + \cdots = 2\,(w_2 + w_3 + w_5 + w_6)$$
$$+ (3\,\mu - 1)\,(w_1 + w_4) - 6\,(1 + \mu)\,w_0\,. \qquad (11)$$

Somit können die Randbedingungen (4.1) in der nachfolgenden Sternform ausgedrückt werden:



$$(w) = 0 \qquad (12)$$

Später wird auch die Differenzenform der Randbedingung (4.1) für den Mittelpunkt der Verbindungslinie von zwei benachbarten Randgitterpunkten gebraucht. Man wählt eine Sterngruppe wie Gl. (13), bezeichnet ihre Punkte, schreibt die Taylorsche Entwicklung zum erwähnten Mittelpunkt an und stellt — unter Voraussetzung der Symmetrie des Operators — gewisse lineare Kombinationen der Werte w in den Sternpunkten zusammen. So ergibt sich schließlich die Randbedingung



$$(w) = 0 \qquad (13)$$

in der der Rest von vierter Ordnung ist.

Ähnlich wird der Ausdruck für die Gl. (4.2) zusammengestellt. Man erwartet die Antimetrie der Differenzenausdrücke zur

x-Achse und die Symmetrie zur y-Achse. Deshalb werden aus Gl. (5) durch Einsetzen nach Gl. (6) die Ausdrücke

$$w_2 + w_3 - w_5 - w_6 = 2\sqrt{3}\, h\, w_y + \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 (w_{xxy} + w_{yyy}) + \cdots \tag{14}$$

$$w_a + w_c - w_d - w_f = 2\sqrt{3}\, h\, w_y + \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 (9 w_{xxy} + w_{yyy}) + \cdots \tag{15}$$

$$w_b - w_e = 2\sqrt{3}\, h\, w_y + \sqrt{3}\, h^3 w_{yyy} + \cdots \tag{16}$$

$$w_u - 4 w_1 + 6 w_0 - 4 w_4 + w_v = h^4 w_{xxxx} + \cdots \tag{17}$$

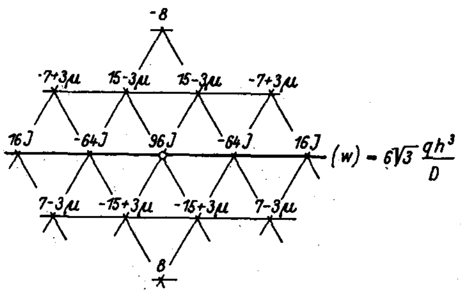
bestimmt, deren Reste sich höchstens in der fünften Ordnung darstellen, ausgenommen Gl. (17), deren Rest sechster Ordnung ist. Diese Gleichungen können als ein System von vier linearen Gleichungen für die vier Unbekannten w_y, w_{xxy}, w_{yyy} und w_{xxxx} betrachtet werden. Multipliziert man die Gl. (14) mit dem Faktor $(-15 + 3\mu)$, Gl. (15) mit $(7 - 3\mu)$, Gl. (16) mit 8 und Gl. (17) mit $16\, I$, wobei

$$I = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{E_1 J_1}{D h}$$

eine dimensionslose Zahl bedeutet, und addiert dann alle, so wird die Relation erhalten:

$$\begin{aligned} 6 h^3 \sqrt{3} \left[-(2-\mu)\, w_{xxy} - w_{yyy} + \frac{E_1 J_1}{D} w_{xxxx} \right] + \cdots \\ = (15 - 3\mu)(w_2 + w_3 - w_5 - w_6) \\ - (7 - 3\mu)(w_a + w_c - w_d - w_f) \\ - 8 (w_b - w_e) + 16\, I\, (w_u - 4 w_1 + 6 w_0 - 4 w_4 + w_v) \end{aligned} \tag{18}$$

Nach Einsetzen in Gl. (4.2) ergibt sich dann die Randbedingung (4.2) in der Form

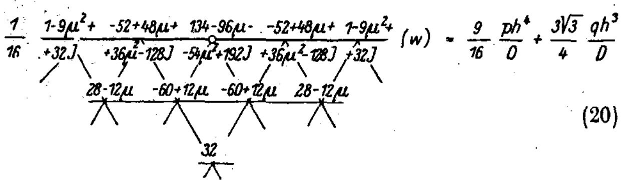


(19)

Wird nun das System der Differenzengleichungen für alle Gitterpunkte angeschrieben, so treten in ihnen als Unbekannte gewisse fiktive Werte der Funktion w in außerhalb der Platte liegenden Punkten auf, und zwar beim freien Rand in zwei dem Rand parallelen Reihen, als wenn die Durchbiegungsfläche außerhalb der Platte verlängert wäre (Bild 2). Diese Werte sind an Randbedingungen gebunden, die man an das System der Differenzengleichungen, deren Anzahl sich dadurch vergrößern würde, anschließen müßte. Das kann von vornherein vermieden werden, wenn es gelingt, die beiden Randbedingungen (12) bzw. (13) und (19) mit der Gl. (8.1) und (8.2.) derart zu vereinigen, daß die erwähnten Werte eliminiert werden. Man erhält auf diese Weise den Endoperator (Randoperator).

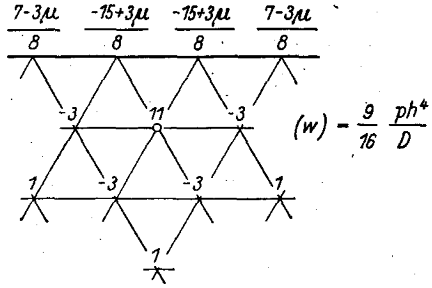
Für einen Randpunkt kann dies folgenderweise durchgeführt werden:

Es werden Gl. (8.2) mit 16 und Gl. (19) mit 2 multipliziert und beide addiert. Zu diesen Gleichungen addiert man dann drei für die benachbarten Randpunkte 4, 0, 1 (Bild 1) sukzessive geschriebene Gln. (12), die vorher nach und nach mit $(-1 - 3\mu)$, $(10 + 6\mu)$, $(-1 - 3\mu)$ multipliziert wurden und erhält schließlich den Endoperator:



(20)

In Gl. (8.1) tritt für einen Gitterpunkt in der zweiten Reihe vom freien Rand der Wert w in einem Punkt außerhalb der Platte auf, und zwar im Punkt b (Bild 1). Wenn man von der mit 8 multiplizierten Gl. (8.1) die Gl. (13) subtrahiert, so erhält man den Endoperator



(21)

Hier tritt die Frage auf, ob es möglich ist, die Bedingung (13), die für den Mittelpunkt des Gitters gilt, mit den übrigen, für den Knotenpunkt des Gitters gültigen Gleichungen zu kombinieren. Dies ist bisher nicht üblich. Eine genaue Untersuchung der Frage ist sehr schwierig, aber es scheinen die tatsächlichen Verhältnisse zumindest ebensogut erfaßt zu werden, als wenn der Operator nach *Jensen* angewendet und alle Randbedingungen für den Gitterknotenpunkt niedergeschrieben würden.

Die Zusammenstellung der Endoperatoren für die Ecke ist einfach und braucht hier nicht erklärt zu werden.

Beim gelenkig gelagerten oder eingespannten Rand sind die Verhältnisse vielfach einfacher und auch bekannt, so daß wir uns hier nicht mit ihnen befassen werden. Es wird nur darauf hingewiesen, daß man bei einer schiefen Platte mit allgemeinem Winkel, bei der das Gitter aus gleichseitigen Dreiecken schwieriger angewendet werden kann, den freien Rand gleichlaufend mit den Gitterfasern annehmen soll. Der gelenkig gelagerte oder eingespannte Rand hat dann eine allgemeine Lage zum Gitter. Man kann aber auch ein allgemeines Dreieckgitter verwenden [6].

Lösung des Gitters mit der Relaxationsmethode

Sind die erforderlichen Differenzenoperatoren bekannt, so kann man an die Lösung des Problems herantreten. Im zu lösenden Bereich wird ein Gitter eingeführt. Wenn man die Differenzengleichungen für die entsprechenden Gitterpunkte niederschreibt, wird im allgemeinen ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} w_i = Z_k, \quad k = 1, 2, \cdots n, \tag{22}$$

worin a_{ik} die Koeffizienten der Unbekannten w_i bedeuten.

Die absoluten Glieder dieser Gleichungen stellen die Belastungsglieder Z_k dar (rechte Seite der Gl. 8.1). Die Koeffizienten jeder Gleichung werden in die entsprechenden vertikalen Spalten der Relaxationstabelle eingetragen (Tafel I). Wählt man gewisse Werte für $w_1, w_2 \cdots w_n$, so werden die Gln. (22) selbstverständlich nicht erfüllt. Damit Gleichheit eintritt, muß man in jeder Gleichung noch irgendein weiteres Glied R_k zum Belastungsglied Z_k hinzufügen, das wir „Residuum" nennen wollen. Damit wird

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} w_i = Z_k + R_k. \tag{23}$$

Die vertikale Kolonne der Relaxationstabelle bildet somit den sogenannten Residualoperator, der den Wert des Residuums in einem bestimmten Gitterpunkt mit Hilfe der Werte w_i bestimmt. Wird jetzt der Wert w_i um Δw_i verändert, so bestimmt die i-te Zeile der Tafel, wie die rechten Seiten verändert werden müssen, um die Gleichheit einzuhalten; sie bestimmt die Veränderungen ΔR_k der Residuen R_k.

$$\Delta R_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot \Delta w_i. \tag{24}$$

Jede Zeile der Tafel stellt den sogenannten Relaxationsoperator dar, der den Einfluß der Durchbiegungsänderungen in einem bestimmten Punkt auf die Werte der Residuen in diesem und in den umgebenden Punkten angibt. Bei der Relaxation wird so fortgeschritten, daß man die sukzessiven Veränderungen Δw_i der Werte w_i durchführt, und zwar so, daß die Residuen nach und nach bis Null bzw. praktisch bis zu genügend kleinen Werten verringert werden. Dadurch wird die Lösung erhalten [4], [7], [8].

Bei der Wahl der Relaxationsschritte, d. h. bei Änderung der Größen w_i, benutzt man vorteilhaft eine physikalische Vorstellung. Da jede Gleichung die Gleichgewichtsbedingung für den betreffenden Punkt darstellt, kann man sich vorstellen, daß sich der Teil R_k — nämlich das Residuum — aus der Belastung $Z_k + R_k$ in jedem Gitterpunkt als Reaktion irgendwelcher fiktiver Stützen überträgt. Mit diesen Stützen könnte man sich die Platte in jedem Gitterpunkt unterstützt denken. Ferner kann man sich vorstellen, daß der Teil Z_k, d. h. das Belastungsglied, die vorgeschriebene unveränderliche äußere Belastung darstellt. Das Relaxationsverfahren bedeutet dann nichts anderes als das sukzessive Freimachen der fiktiven Stützen. Bei jedem Schritt wird ein Teil der Reaktion jeder Stütze ausgeglichen, um sie schließlich ganz zu beseitigen.

Die Relaxationsmethode konvergiert gegenüber anderen sukzessiven Methoden (z. B. Iteration) dadurch schneller, daß man die einzelnen Schritte nicht mechanisch wählt, sondern sie sich genau überlegt und besonders dadurch, daß man Gruppen- und Blockrelaxationsschritte benutzt, bei denen mehrere Werte w_i auf einmal verändert werden; das ist hauptsächlich bei umfangreichen Gittern von Vorteil [8].

In gewissen Fällen jedoch — wie z. B. bei einem Teil eines größeren symmetrischen Gitters oder bei komplizierteren Randbedingungen — führen sich die Residuen nicht als genügend kleinere Werte in die benachbarten Punkte ein. Dann ist die Auswahl der Gruppenrelaxationsschritte schwierig und die Konvergenz sehr langsam. Dies ist bei den von uns untersuchten schiefen Platten der Fall. Im II. Teil wird gezeigt werden, wie der Relaxationsprozeß in zahlreichen Fällen, besonders wenn die Relaxation langsam vor sich geht, durch die nachfolgend beschriebene Methode bedeutend beschleunigt werden kann.

Tafel I Relaxationstabelle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	12	-3		1	-3	-3	1			1								
2	-6	12	-3	-3	-2	-2	-3	1	1		1							
3		-3	11	-3	1	1	-3	-3				1						
4	2	-3	-3	11	-3		1		-3	1								
5	-6	-2	1	-3	12	-3			-3	-3	1			2				
6	-6	-2	1		-2	12	-3		1	-3	-3	1			2			
7	2	-3	-3	1		-3	12	-3		1	-3	-3	1			2		
8		1	-3				-3	11			1	-3	-3				2	
9		1		-3	-3	1			10 1/8	-3				-3 13/16	1 3/4			
10	2			1	-3	-3	1		-3	11	-3			-3 3/4	-3 3/4	1 3/4		
11		1			1	-3	-3	1		-3	11	-3		1 3/4	-3 3/4	-3 3/4	1 3/4	
12			1			1	-3	-3			-3	11	-3		1 3/4	-3 3/4	-3 3/4	1 3/4
13							1	-3				-3	10			-1 3/4	-3 3/4	-3 3/4
14					1				-1 7/8	-1 7/8	7/8			8 3/8	-3 1/4	1/16		
15						1			7/8	-1 7/8	-1 7/8	7/8		-3 1/4	8 3/8	-3 1/4	1/16	
16							1			7/8	-1 7/8	-1 7/8	7/8	1/16	-3 1/4	8 3/8	-3 1/4	1/16
17								1			7/8	-1 7/8	-1 7/8		1/16	-3 1/4	8 3/8	-3 1/4
18												7/8	-1 7/8			1/16	-3 1/4	6 9/16
Z	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

BBA 5285 (Schluß in Heft 2)

Für das Vertrauen und für die wertvolle Mitarbeit im Jahre 1961 danken wir unseren Lesern und Mitarbeitern. Wir verbinden diesen Dank mit den besten Wünschen für ein erfolgreiches Neues Jahr.

Redaktion „Bauplanung – Bautechnik"

Beitrag zur Differenzenlösung schiefer Platten und eine neue Art der Relaxationsmethode Schluß

Dipl.-Ing. Zdenek P. BAZANT, Dopravoprojekt Prag, Projektierungsbüro des Straßenwesens

DK 624.04:624.073.126

Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied

Die Methode, die Residuen zu eliminieren, besteht bei der Relaxationsmethode darin, daß wir „die Residuen zu den Randpunkten überführen", wo sie durch Blockrelaxation entfernt werden. Die Entfernung der Residuen geht nämlich bei der Relaxation leicht vor sich, wenn sie in einem Gitter mit umgekehrten Vorzeichen verteilt sind. Nach einigen Relaxationsschritten verkleinert man die Residuen und bekommt sie ohne Schwierigkeiten in Form von Werten, die gegenseitig dasselbe Vorzeichen und annähernd dieselbe Größe besitzen. Dann ist der Vorgang schon schwieriger. Bei normaler Relaxation muß man „die Residuen zum Rand überführen". An den Rändern werden sie durch Blockrelaxationschritte entfernt. Je näher die einzelnen Punkte zum Rande liegen oder je größer die Anzahl der Randpunkte ist, desto leichter kann man „die Residuen zum Rande führen" und desto schneller schreitet die Relaxation fort.

Wenn es also gelingen würde, gewissen weiteren Gitterpunkten den Charakter von Randpunkten zu geben oder irgendwelche weiteren imaginären Punkte einzuführen, die den Charakter von Randpunkten hätten, so würde man die Relaxation dadurch bedeutend beschleunigen. Gerade dies wird durch die Relaxation mit veränderlichem Belastungsglied ermöglicht. Diejenigen Punkte, die den Charakter von Randpunkten haben, d. h. bei denen man die Residuen leicht entfernen kann, bezeichnet man als Singularpunkte des Gitters. Es können entweder direkt Punkte des Gitters oder irgendwelche weiteren fiktiven Punkte sein.

a) Damit irgendein Punkt des Gitters zu einem Singularpunkt desselben wird, genügt es, den Ausdruck $Z_k + R_k$ in Gl. (23) als das im augenblicklichen Durchbiegungszustand zum Erreichen des Gleichgewichts notwendige Belastungsglied $\overline{Z}_k$ zu erklären.

$$\overline{Z}_k = Z_k + R_k\,. \tag{25}$$

Dann wird erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, w_i = \overline{Z}_k\,. \tag{26}$$

Um das Gleichgewicht zu erzielen, braucht man dann in diesem Punkt keine fiktive Stütze einzuführen. Dieser Punkt hat kein Residuum. Das Glied $\overline{Z}_k$ kann nicht von vornherein gewählt werden, da nach jeder Veränderung Δw_i eine andere Belastung notwendig wird, um Gleichgewicht zu erreichen. Aus Gl. (26) folgt, daß sich das Glied $\overline{Z}_k$ in gleicher Weise ändert, wie das Residuum in diesem Punkt.

$$\Delta\,\overline{Z}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot \Delta\, w_i\,. \tag{27}$$

Die Änderung des Gliedes $\overline{Z}_k$ ist dabei nebensächlich. In diesem Punkt kann man die Residuen überführen und dadurch, daß sie in das Belastungsglied $\overline{Z}_k$ einbezogen werden, entfernt man sie einfach. Durch Änderung der Größe von w in diesem Punkt können auch die Werte der Residuen in den umgebenden Punkten beeinflußt werden. Die auf diese Weise durchgeführte Relaxationslösung hat die Besonderheit, daß ein von vornherein nicht bekannter Belastungsfall gelöst und erst dann, wenn man zum Resultat gelangt, gleichzeitig die Belastung erhalten wird, die die Endwerte w_i ergibt.

Die Singularpunkte kann man natürlich nicht willkürlich wählen. Gewöhnlich wird ein Singularpunkt in dem Punkt angenommen, in dem eine Einzellast wirkt. Man muß bei der Wahl in der Weise vorgehen, daß von dem erlangten Zustand (eventuell von einigen erlangten Zuständen) zur Lösung der gegebenen Aufgabe entsprechend dem Superpositionsprinzip, d. h. durch Linearkombinationen, übergegangen werden kann und daß sich die ganze Lösung nicht umständlicher gestaltet als ohne Singularpunkte. Es kann bewiesen werden, daß — wenn man bei allgemeinen rechten Seiten Z_k „r" Singularpunkte wählen würde, die Relaxation $(r + 1)$ mal durchgeführt werden müßte, damit $r + 1$ Belastungszustände erhalten werden, die linear unabhängig sein müssen. Wenn von den Gliedern Z_k nur r Glieder einen von Null abweichenden Wert besitzen und wenn in den betreffenden Punkten die Singularpunkte gewählt werden, muß man die Relaxation r-mal durchführen [2]. Wenn also nur ein einziges Belastungsglied vorliegt, das nicht gleich Null ist, also nur eine Einzellast angreift, und wenn in diesem Punkt ein Singularpunkt des Gitters gewählt wird, genügt es, die Relaxation nur einmal vorzunehmen. In diesem Fall verkleinert sich auch die Anzahl der linearen Gleichungen um eins. Die Wahl mehrerer Singularpunkte kann ebenfalls vorteilhaft sein, und zwar dann, wenn die Ersparnis aus der Beschleunigung des Vorganges größer ist als der Verlust aus der mehrfach wiederholten Relaxation.

b) Die Residuen in den einzelnen Gitterpunkten können auch auf die Weise beeinflußt werden, daß man einen $\overline{x}\cdot Z_k$ großen Teil von ihnen in den einzelnen Punkten als äußere Belastung betrachtet und ihn zu den schon bestehenden Belastungsgliedern hinzufügt. Werden solche Veränderungen der Belastung vorgenommen, haben die äußeren Belastungsglieder bei allen Schritten die allgemeine Form

$$\overline{Z}_k = \overline{x}\cdot Z_k\,. \tag{28}$$

Hier ist $\overline{x}$ ein veränderlicher Koeffizient. Es handelt sich also wieder um eine Veränderung der äußeren Belastung (es ändern sich alle Belastungsglieder Z_k). Dieser Fall kann auch mit dem vorhergehenden Fall des Singularpunktes in Zusammenhang gebracht werden. Man kann sich vorstellen, daß alle Gitterpunkte mit einem weiteren fiktiven Punkt verbunden sind, dem man durch Vermittlung des Relaxationsoperators $(-Z_1, -Z_2, \cdots -Z_n)$ den Wert des Koeffizienten $\overline{x}$ zuteilt. Die Veränderung $\Delta\,\overline{x}$ des mit diesem Punkt verbundenen Koeffizienten $\overline{x}$ entspricht dann der Veränderung der Residuen,

$$\Delta\,\overline{Z}_k = -\,\Delta\,\overline{x}\cdot Z_k\,. \tag{29}$$

Dieser Punkt hat eine analoge Bedeutung wie der Singularpunkt im Abschnitt a). Er wird als *uneigentlicher Singularpunkt* des Gitters bezeichnet. In diesem Punkt trägt man den Wert des Koeffizienten $\overline{x}$ der äußeren Belastung ein oder bei einer gleichmäßig verteilten Belastung direkt den Wert der veränderlichen Belastungsglieder. Mit dem uneigentlichen Singularpunkt brauchen nicht alle Punkte des Gitters verbunden zu sein, sondern nur eine bestimmte gewählte Gruppe der Gitterpunkte (gleiche Belastungsglieder nur auf einem Teil des Gitters). Auf diese Weise kann man auch — wie im Abschnitt a) — mehrere uneigentliche Singularpunkte wählen.

Diese Art von Relaxationsschritten ist besonders dann von Vorteil, wenn die rechten Seiten der Gln. (22) alle gleich oder wenigstens annähernd gleich sind (z. B. gleichmäßig belastete Platte, Torsion). Bei der Relaxation eines jeden Gitters entfernt man die Residuen sehr leicht, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben. Nach einigen Relaxationsschritten erreicht man, daß die Residuen nahezu gleiche Größe und gleiches Vorzeichen erhalten. Der weitere Vorgang ist dann normalerweise schon schwieriger und erfordert Blockrelaxationen. Der durch Abschätzung bestimmte Mittelwert dieser Residuen wird dann in das veränderliche Belastungsglied Z überführt, dessen augenblicklicher Zustand nach jedem Relaxationsschritt das Gleichgewicht darstellt. So erhält man im Verlauf eines einzigen Schrittes den Zustand der Residuen, in dem diese wiederum verschiedene Vorzeichen besitzen, aber schon bedeutend kleiner sind. In gleicher Weise kann fortgefahren werden.

Um eine größere Übersichtlichkeit zu erhalten, soll noch eine kurze Rechenvorschrift eingefügt werden, nach der die einzelnen Schritte vorzunehmen sind. Sie ist in Bild 3 angeführt. Zu den gewählten Relaxationsschritten dreier grundlegender Typen, d. h. Schritt ohne Singularpunkt (s') (wie bei der normalen Southwellschen Relaxation), Schritt mit einem Singularpunkt des Gitters (a'') und Schritt mit einem uneigentlichen Singularpunkt des Gitter (b'''), sind bei den entsprechenden Punkten die Veränderungen der Residuenwerte in ihrer allgemeinen Form eingetragen. In diesem Bild sind die einzelnen Differenzengleichungen angegeben. Die Singularpunkte sind durch zwei kleine Kreise bezeichnet. Als Punkte, in denen die Durchbiegung verändert werden soll (Schritt $'$), wählt man solche, wo die Residuen maximale Werte erreichen. Δw wählt man schätzungsweise derart, daß diese Residuen zu Null oder zumindest im Durchschnitt verkleinert werden. In einem Singularpunkt des Gitters wird die Durchbiegung dann verändert (Schritt a''), wenn man dadurch die Residuen in den umgebenden Punkten verkleinern kann. In einem uneigentlichen Singularpunkt ändert man die Belastung (Schritt b'''), wenn Residuen des gleichen Vorzeichens überwiegen.

Man kann also feststellen, daß die vorgeschlagene Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied, die eigentlich eine Verallgemeinerung der normalen Relaxationsmethode darstellt, den Vorteil bringt, weitere Gitterpunkte mit dem Charakter von Randpunkten zur Verfügung zu stellen, in die man dann die Residuen überführen kann. Dadurch wird die Relaxation wesentlich beschleunigt, besonders wenn die normale Relaxation nur langsam fortschreitet. Auf diese Weise wird sich die Anwendung der Relaxationsmethode auch auf solche Fälle erstrecken, bei denen sie sich bisher als unvorteilhaft erwies. Sie wird immer dann mit Vorteil angewendet, wenn alle Belastungsglieder gleich sind (gleichmäßig belastete Fläche, Torsion) oder wenn nur ein einziges von Null verschiedenes Belastungsglied vorhanden ist (Einzellast). Werden mehrere Singularpunkte gewählt, ungeachtet ob sie eigentlich, uneigentlich oder beides sind, wird der Vorgang noch mehr beschleunigt. Man muß dabei aber das Gitter so viele Male lösen, wie Singularpunkte gewählt worden sind, damit aus den gewonnenen Belastungs- und Durchbiegungszuständen mit Hilfe ihrer linearen Kombination die Lösung für den gegebenen Belastungszustand bestimmt werden kann. Die Entscheidung muß man auf Grund des Gefühls oder der Erfahrung treffen. Zur Wahl mehrerer Singularpunkte entschließt man sich grundsätzlich dann, wenn man dasselbe Gitter für mehrere Belastungszustände lösen muß (wie auch im folgenden Beispiel). Sonst müßte man dann die Lösung auf jeden Fall mehrere Male vornehmen. Es soll auch darauf hingewiesen werden, daß die Schnelligkeit der Konvergenz bei Relaxationsmethoden sehr viel von der Erfahrung und Geschicklichkeit des Rechners abhängt, und besonders davon, inwieweit er es versteht, die einzelnen Schritte passend zu wählen. Man wählt die Schritte am besten nach der gefühlsmäßig abgeschätzten Formänderung der Platte (eventuell Membran) bei Belastung durch die gegebenen Residuen.

Die Anwendungsmöglichkeit dieser Lösungsmethode ist durch die Gültigkeit des Superpositionsprinzips bei elastischen Systemen gegeben. Sie kann auch ziemlich einfach und genau mit Hilfe der linearen Algebra mathematisch abgeleitet werden [2].

Lösung eines Zahlenbeispiels

Als praktisches Beispiel wird eine schiefe rhombusförmige Stahlbetonplatte $ABCD$ ($\mu = 0$) ohne Bordträger gewählt, deren Seitenlänge a ist und die einen Winkel von $\alpha = 60°$ einschließt. An den Rändern AD und BC ist die Platte gelenkig und an den Rändern AB und CD frei gelagert (Bild 2). Es wird einerseits die Einflußfläche der Durchbiegung in Plattenmitte bestimmt, was der Aufgabe gleichkommt, die Durchbiegungsfläche der Platte bei Lasteintragung durch eine Einzellast in der Mitte zu ermitteln, andrerseits wird die Durchbiegungsfläche für gleichmäßig verteilte Belastung bestimmt.

Es wird ein Dreieckgitter mit der Seitenlänge $h = a/6$ (Bild 2) gewählt. Die Platte mit ihren Randbedingungen, das Gitter und beide Belastungsfälle sind symmetrisch zum Plattenmittelpunkt, so daß es genügt, nur eine Hälfte der Platte, d. h. 18 Gitterpunkte, zu lösen. Die Punkte numeriert man symmetrisch zum Plattenmittelpunkt. Dadurch bestimmt man schon

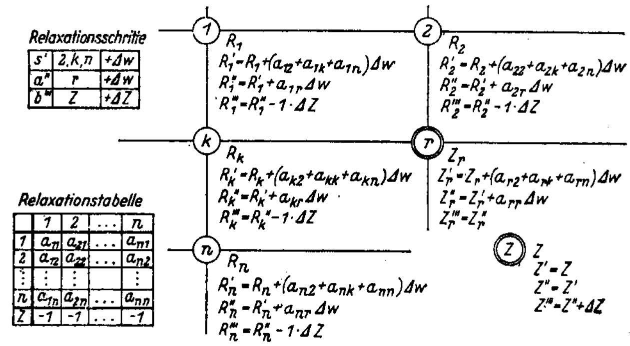


Bild 3. Rechenvorschrift für drei Grundtypen der Relaxationsschritte

von vornherein, daß auch alle vorzunehmenden Operationen symmetrisch sein werden. Schreibt man für die Punkte 1, 2, $\cdots$ 18 die entsprechenden Differenzengleichungen, so ergibt sich ein System von 18 linearen Gleichungen mit 18 Unbekannten $w_1, w_2, \cdots w_{18}$ (Tafel I, vertikale Kolonnen).

Man wählt einen Singularpunkt des Gitters im Plattenmittelpunkt (Einzellast), d. h. im Punkt 1, sowie einen uneigentlichen Singularpunkt des Gitters, der mit den Punkten 2, 3, $\cdots$ 18 durch den Operator in der letzten Tabellenzeile (gleichmäßige Belastung) verbunden ist. Man kann also die Schritte bei der Relaxationsberechnung sowohl nach der Art a) als auch nach b) vornehmen. Man muß die Lösung für zwei verschiedene, beliebige Belastungszustände (Z_1', Z') und (Z_1'', Z'') ausarbeiten, die gegenseitig linear unabhängig und „von der linearen Abhängigkeit auch wesentlich entfernt" sein müssen. Dies wird dadurch erzielt, daß man wesentlich verschiedene Ausgangswerte der Durchbiegungen wählt. Diese Werte wurden hier als abgeschätzte Durchbiegungen bei Belastung durch Einzellast und bei gleichmäßig verteilter Belastung gewählt.

Die beiden Relaxationsberechnungen I und II mit veränderlichem Belastungsglied sind in den Bildern 4 und 5 durchgeführt worden. In jeder Berechnung sind links über dem betreffenden Punkt die gewählten (abgeschätzten) Ausgangswerte eingetragen. In den Kolonnen unter dem betreffenden Punkt werden sukzessive die Residuen eingetragen. An erster Stelle stehen die Ausgangswerte der Residuen, die man durch Einsetzung der Ausgangswerte w_i in die Kolonnen der Tafel 1 bestimmt. An letzter Stelle stehen die Endwerte der Residuen, die genügend klein sind. Die Singularpunkte sind durch zwei kleine Kreise bezeichnet. Im Singularpunkt 1 des Gitters trägt man, formal in gleicher Weise wie das Residuum, das veränderliche Belastungsglied Z_1' bzw. Z_1' ein. In der Praxis braucht es nicht eingetragen zu werden. Der Anschaulichkeit halber soll es jedoch angeführt werden. Links an der ersten Stelle der Kolonne steht der Ausgangswert des Gliedes Z_1' bzw. Z_1'' und rechts auf der letzten Stelle sein Endwert. Beim uneigentlichen Singularpunkt trägt man sukzessive das veränderliche Belastungsglied Z' bzw. Z'' ein. Auf der ersten Stelle steht sein Ausgangswert, unterstrichen auf der vorletzten Stelle sein Endwert. In der Tabelle sind auf jeder Seite der Berechnung sukzessive die Relaxationsschritte eingetragen. Die Endwerte der Durchbiegung befinden sich in jeder Berechnung rechts oben von jedem Punkt. Zur Ausarbeitung der Berechnung waren 22 bzw. 20 Relaxationsschritte notwendig.

Relaxationsschritte

i	Δw_i
1	+ 500
13	− 500
8, 11, 13, 15, 18	− 300
3, 4, 9, 10, 17	+ 200
2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 17	+ 100
8, 13, 16	− 100
4, 5, 9, 10, 14	+ 200
2, 4, 6, 9, 14, 15	+ 100
2, 6, 9, 12, 13, 17	− 50
8, 10, 17	− 20
3	+ 20
2, 3, 4, 7, 8, 11	+ 20
1, 17, 18	− 20
3, 9, 15	+ 10
13, 17, 18	− 20
3, 7, 10, 11, 15	+ 10
17, 18	− 20
Z	− 20
12, 13, 16, 17, 18	− 10
Z	+ 10
2, 4, 6, 14	+ 5
8, 11, 12, 13, 16, 17, 18	− 5
13, 16, 17, 18	− 5
5, 9	+ 5
2, 3, 4, 10, 14	+ 3
1, 12, 17	− 3
1, 16, 17	− 2
4, 9, 10, 14	+ 2
Z	+ 10
9, 10, 11, 14, 15	+ 2
3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 15	+ 2
1	− 2
14, 15	+ 2
Z	− 3
2, 8, 12, 13, 17	− 1
9, 10, 14	+ 1

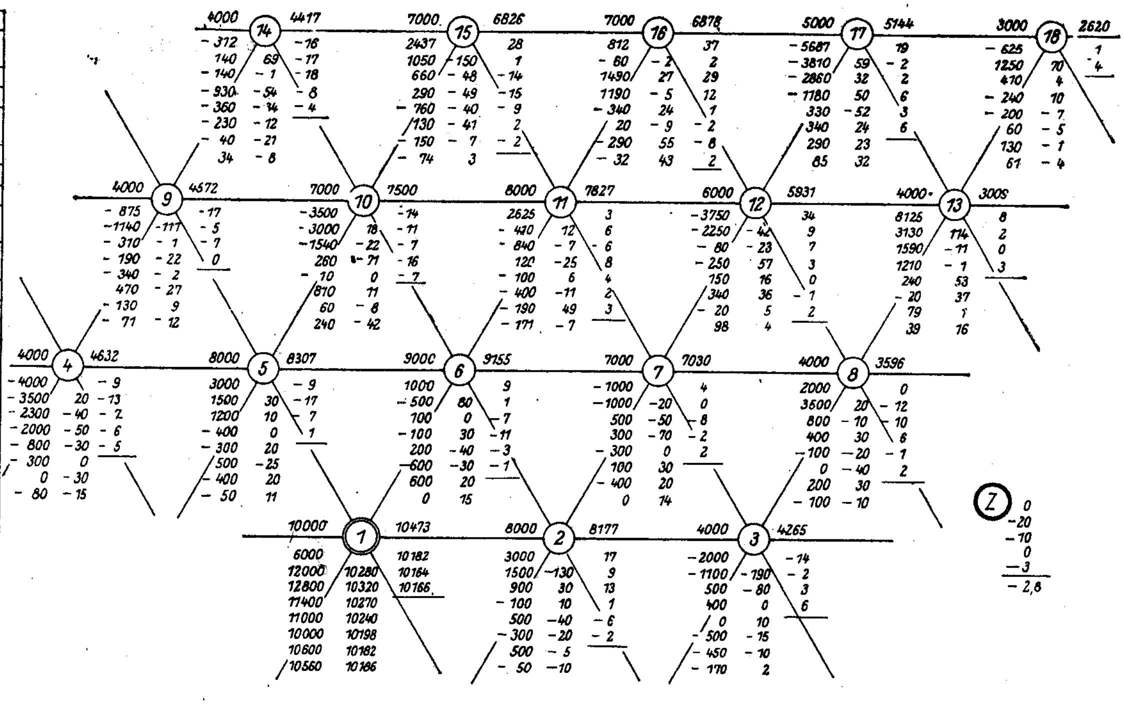


Bild 4. Relaxationsberechnung I

Relaxationsschritte

i	Δw_i
2, 5, 7, 10, 12, 15, 17	+ 500
Z	+1000
5, 6, 7, 9, 12, 14, 17	+ 200
11	− 400
Z	− 500
2, 5, 9, 12, 14, 17	+ 200
15, 18	− 200
4	+ 100
10, 14	− 100
5, 11, 12, 13, 16	− 50
3, 4, 7, 18	+ 50
3, 4, 6, 10, 12, 16	− 20
Z	+ 50
10	− 10
3, 8, 12, 17, 18	+ 10
5, 9, 10, 11, 14, 15	− 10
4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15	− 10
13, 17, 18	+ 10
10, 14, 15	− 20
9, 10, 11, 14, 15	− 20
1	+ 20
16	− 10
1, 8, 17, 18	+ 10
2, 3, 13, 17, 18	+ 10
3, 14, 15	− 5
12	+ 5
Z	+ 10
3, 5, 7, 8, 13, 17, 18	+ 3
14, 15	− 3
7, 12, 17	+ 2
9, 10, 14, 15	− 2
Z	− 5
5, 10, 14, 15	− 2
8, 12, 13, 17	+ 2
4, 9, 14, 15	− 1
2, 3, 7	+ 1

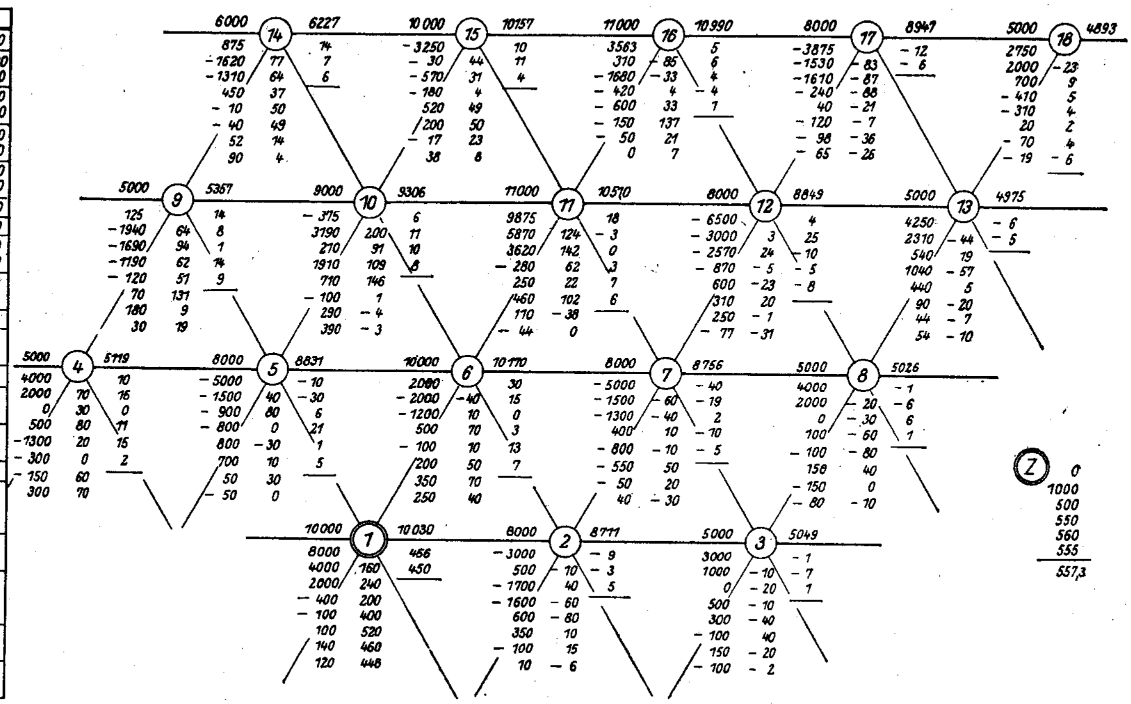


Bild 5. Relaxationsberechnung II

Wenn man verlangt, daß die resultierenden Residuenwerte keine Durchbiegung im Plattenmittelpunkt hervorrufen, kann man ihr durchschnittliches Gewicht in das Belastungsglied Z' bzw. Z'' überführen und die resultierenden Werte auf diese Weise bis auf die auf der letzten Stelle der Kolonnen beim uneigentlichen Singularpunkt eingetragenen Werte verbessern. Hierbei werden den einzelnen Residuen Gewichte zugewiesen, die den Größen der Ordinaten der Einflußfläche (Bild 6) proportional sind.

Die Berechnung I (Bild 4) ergab als Resultat den Durchbiegungswert in Plattenmitte $w_1' = 10\,473$, dem die Endwerte $Z_1' = 10\,166$, $Z' = -2{,}8$ entsprechen. In der Berechnung II (Bild 5) ergab sich $w_1'' = 10\,030$, dem $Z_1'' = 450$, $Z'' = 557{,}3$ entsprechen.

Nun kann man schon die Lösung für die Einzellast bestimmen. Wir werden so eine lineare Kombination der beiden Belastungszustände bilden, aus der sich $w_1 = 1$ und $Z = 0$ ergeben. Man multipliziert die Werte w_1', Z_1' und Z' mit $0{,}9502 \cdot 10^{-4}$, die Werte w'', Z_1'', Z'' mit $0{,}0048 \cdot 10^{-4}$ und addiert sie. Das Belastungsglied Z_1, das dem Wert $w_1 = 1$ entspricht, wird $9662 \cdot 10^{-4}$ betragen. Für das allgemeine Belastungsglied (8.2) bestimmt man dann in direkter Proportionalität den wirklichen Durchbiegungswert w_1 in Plattenmitte.

$$w_1 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot 0{,}9662} \, \frac{P \cdot h^2}{D} = 0{,}0187 \, \frac{P \cdot a^2}{D}. \qquad (30)$$

Der Formänderungszustand der Platte, der dem Wert $w_1 = 1$ entspricht, ist aus Bild 6 ersichtlich. Die wirklichen Größen der

Durchbiegungen erhält man, wenn die hier angegebenen Werte $w_0(x, y)$ mit dem Ergebnis von (30) multipliziert werden. Die Ordinaten $\delta(x, y)$ der Einflußfläche für die Durchbiegung in Plattenmitte sind

$$\delta(x, y) = 0{,}0187 \cdot \frac{a^2}{D} \cdot w_0(x, y) \,. \tag{31}$$

Jetzt wird die Lösung für gleichmäßig verteilte Belastung bestimmt. Man stellt eine solche lineare Kombination der beiden Zustände zusammen, aus der sich $w_1 = 1$ und $Z_1 = Z$ ergeben. Dies wird so durchgeführt, daß man die Werte w', Z_1', Z' mit $0{,}0104 \cdot 10^{-4}$, die Werte w'', Z_1'', Z'' mit $0{,}9861 \cdot 10^{-4}$ multipliziert und dann addiert. Das dem Wert $w_1 = 1$ entsprechende Belastungsglied Z_1 wird $549{,}5 \cdot 10^{-4}$ betragen. Für das allgemeine Belastungsglied aus Gl. (8.2) bestimmt man dann den wirklichen Belastungswert in Plattenmitte.

$$w_1 = \frac{9}{16 \cdot 0{,}05495} \cdot \frac{p \cdot h^4}{D} = 0{,}00790 \cdot \frac{p \cdot a^4}{D} \,. \tag{32}$$

Der Formänderungszustand der Platte, der dem Wert $w_1 = 1$ entspricht, ist aus Bild 7 ersichtlich. Die wirklichen Größen der Durchbiegungen werden erhalten, wenn man die hier angegebenen Werte mit dem Wert der Gl. (32) multipliziert.

Die Richtigkeit der Rechnung kann man kontrollieren, wenn der Wert der Gl. (32) mit dem aus der Einflußfläche der Durchbiegung ausgerechneten Wert verglichen wird. Es gilt nämlich

$$w_1 = \iint_0 p \cdot \delta(x, y)\, dx\, dy = 0{,}0187 \cdot \frac{p \cdot a^2}{D} \iint_0 w_0(x, y)\, dx\, dy \,. \tag{33}$$

Hierin bedeutet 0 den Bereich der Platte. Das letzte Flächenintegral löst man angenähert mit Hilfe der Simpsonschen Regel aus den Werten $w_0(x, y)$ im Bild 7 über die Querschnittsflächen. Man erhält hier den Wert $9{,}047\ h^2 \sqrt{3}$. Somit ergibt sich

$$w_1 = 0{,}0081 \cdot \frac{p \cdot a^4}{D} \,. \tag{34}$$

Trotz der angenäherten Berechnung des Flächenintegrals stimmt dieses Ergebnis mit dem direkt ausgerechneten der Gl. (32) gut überein. Der Fehler beträgt nur etwa 2,5%. Dadurch wird die Richtigkeit der Rechnung bestätigt.

den können, um 26% bzw. um 30% ab. Das ist ziemlich viel. Hiervon sind rd. 10% auf eine zu grobe Gitterteilung und der Rest auf die erwähnte angenäherte Einführung der Randbedingung zurückzuführen. Dieser Vergleich beweist, daß eine Ungenauigkeit in der Einführung der Randbedingungen wesentlich das Ergebnis beeinflußt. Es ist deshalb notwendig, eine genauere Form (13) der Randbedingung anzuwenden. Aus dem Vergleich geht ferner hervor, daß bei komplizierteren Randbedingungen eine feinere Gitterteilung erforderlich ist.

Für die praktische Durchführung der Berechnung soll noch besonders erwähnt werden, daß es bei der Relaxation sinnlos wäre, die Residuen und ihre Veränderungen genau zu berechnen. Die Produkte und Summen rechnet man im Kopf, rundet sie auf zwei gültige Ziffern ab und trägt nur die Residuenwerte bei jedem Schritt ein. Bei den Relaxationsschritten wählt man die Durchbiegungsveränderungen immer in runden Werten 1, 2, 5 bzw. 3 (oder 10, 20, 50... oder 100, 200, 500... usw.), damit man schnell im Kopf multiplizieren kann. Die durch das Abrunden entstehenden Fehler sind nebensächlich, da wir nach 10 bis 20 Schritten (bei einer Verkleinerung der Residuen auf 1/10 bis 1/20) sowieso empfehlen, Kontrollen vorzunehmen, bei denen die Residuenwerte genauer gestaltet und eventuell aufgetretene Fehler korrigiert werden können. Je grober der Maßstab der Abrundungen ist, desto öfter sind Kontrollen notwendig. Bei Kontrollen mit Rechenmaschinen ist es besser, an Stelle der Gesamtwerte der Durchbiegungen die Gesamtveränderungen der Durchbiegungen im Zeitraum von der letzten Kontrolle ab einzusetzen, so daß man wiederum höchstens mit zweistelligen Zahlen zu multiplizieren braucht. Die Zeilen, die man nicht addiert, verdeckt man bei der Addition der Koeffizienten der Zeilen der Relaxationstabelle mit Papierstreifen.

Bei Berechnung dieses Beispiels ist es durch normale Relaxation [8] nicht einmal nach 76 Schritten gelungen, ein Resultat zu erzielen. Es häuften sich im ganzen Gitter oder in seinen Teilen Residuen des gleichen Vorzeichens, die nur schwer zu entfernen sind. Zu einer solchen Lösung brauchte man wesentlich mehr Zeit als bei Anwendung der hier vorgeschlagenen Methode. Auch die direkte Eliminationslösung dauerte länger, so daß es sinnlos wäre, die normale Relaxation anzuwenden. Eine Iterationslösung würde noch mehr Zeit in Anspruch nehmen als eine Lösung mit normaler Relaxation.

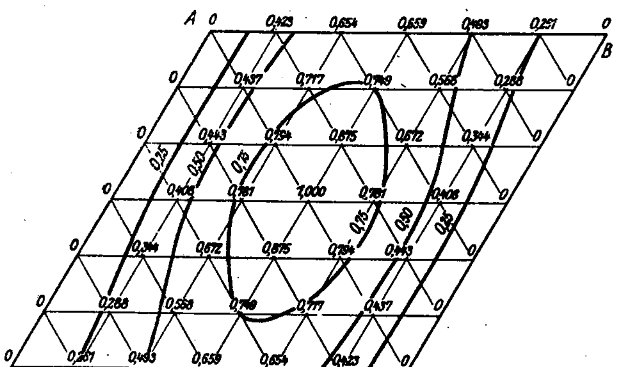


Bild 6. Einflußfläche der Durchbiegung in Plattenmitte. Durchbiegungszustand bei Belastung durch eine Einzellast in Plattenmitte

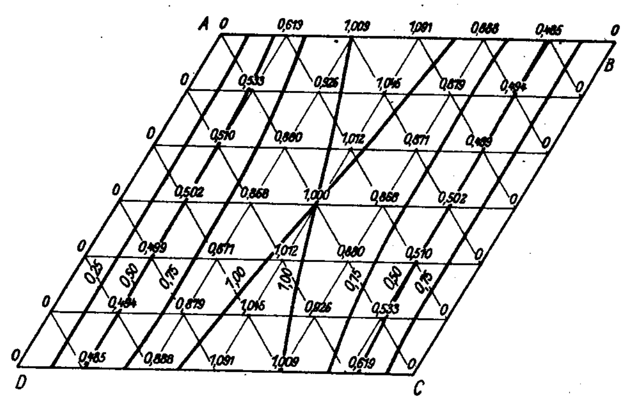


Bild 7. Durchbiegungszustand bei gleichmäßig verteilter Belastung

Die Biegungs- und Drillmomente errechnet man aus der Durchbiegungsfläche durch Einsetzen in die bekannten Formeln (z. B. [3, Gl. 919]). In die Derivationswerte w_{xx}, w_{xy} und w_{yy} in den Gitterpunkten werden ihre aus den Differenzenformeln ausgerechneten Größen eingesetzt.

Der Autor hat das gleiche Beispiel mit einem grobmaschigen Gitter $h = a/4$ (8 Gleichungen) und unter vereinfachter Einführung der Randbedingung (13) in Gl. (21) gelöst, wobei der Verlauf der Durchbiegung längs der Verbindungslinie zweier benachbarter Gitterpunkte auf dem freien Rand annähernd linear [1] angenommen wurde. Die Ergebnisse weichen von den hier angeführten, die als vielfach genauer angesehen wer-

Vergleicht man nun den Aufwand der vorgeschlagenen Berechnungsweise mit dem einer direkten Ausrechnung der gleichen Aufgabe mit Hilfe der Elimination. Zur Lösung der beiden Belastungsfälle durch Elimination würden 1184 Multiplikationen oder Divisionen und 1133 Additionen vierstelliger Zahlen benötigt werden, wobei Voraussetzung ist, daß alle diese Operationen auf einer elektrischen Rechenmaschine durchgeführt werden. (Zur Lösung eines einzigen Belastungszustandes wären 1056 Multiplikationen und 1039 Additionen erforderlich.) Bei der hier durchgeführten Berechnung der beiden Belastungszustände war es aber nur notwendig, 654 Multiplikationen höchstens zweistelliger Zahlen mit 1, 2 oder 5 bzw. 3 und 654 Additionen zweistelliger Zahlen durchzuführen. Darin ist jedoch nicht die Addition der Koeffizienten der Tabellenzeilen enthalten. Ferner ist nicht die für das Nachdenken über die zweckmäßigste Wahl der Relaxationsschritte erforderliche Zeit berücksichtigt. Nach Erfahrung bedeutet dies beides zusammen rd. 40% aller Arbeit. Da aber die bei der Relaxation im Kopf vorgenommenen Operationen (Multiplizieren und Addieren) zumindest zweimal schneller geben als die Operationen bei der Elimination — wo vierstellige Zahlen in die Maschine eingestellt und die Ergebnisse abgeschrieben werden müssen —, kann man behaupten, daß die mit der hier vorgeschlagenen Methode vorgenommene Berechnung zumindest doppelt so schnell wie bei Anwendung der direkten Lösung durch Elimination ist.

Der zweite, nicht minder wichtige Vorteil der Relaxation gegenüber der Elimination besteht in der Tatsache, daß es ziemlich bedeutungslos ist, ob sich im Laufe der Berechnung ein Fehler einschleicht. Man entdeckt ihn bei der nächsten Kontrolle und braucht dabei nicht nachzusuchen, wo er gemacht worden ist. Vielmehr kann man von diesem Zustand aus weiter fortfahren, wobei die Berechnung nur um einige Schritte verlängert wird. Wenn man hingegen bei der Elimination einen Fehler macht, muß man praktisch die ganze Berechnung wiederholen.

Wir können somit feststellen, daß die vorgeschlagene Methode den notwendigen Arbeitsaufwand reduziert und den Ingenieuren wertvolle Zeit erspart.

BBA 5285

Literatur

[1] *Bažant, Z. P.:* Relaxační řešení šikmých desek s volnými okraji (Relaxationslösung schiefer Platten mit freien Rändern). Inženýrské Stavby (1958) H. 8, S. 437, Praha

[2] *Bažant, Z. P.:* Relaxace s proměnným zatěžovacím členem a její užití při řešení desek a problému kroucení (Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied und ihre Anwendung für die Platten und Torsionberechnungen). Aplikace Matematiky (1960), Praha

[3] *Beyer, K.:* Die Statik im Stahlbetonbau. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1956

[4] *Collatz, L.:* Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin 1951

[5] *Favre, H.:* Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences. Mémoires de l'A.I.P.C. Zürich 1943/44

[6] *Jensen, V. P.:* Analysis of skew slabs. University of Illinois Bulletin (1941) No. 3

[7] *Southwell, R. W.:* Relaxation Methods in Engineering Science. A Treatise on approximate computation. Univ. Press. Oxford 1940

[8] *Southwell, R. W.:* Relaxation Methods in Theoretical Physics. A continuation of the treatise. Univ. Press. Oxford 1946

[9] *Timoshenko, S. P.:* Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York 1940