English Translation: "Use of relaxation method with variable load term for skew plate analysis"

Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden · 9 (1959/60) Heft 2 · Herausgeber: Der Rektor

(B) Fakultät für Bauwesen / Publ.-Nr. 181

Lehrstuhl für Technische Mechanik und Festigkeitslehre für Bauingenieure, Prof. Dr.-Ing. habil. Günther Grüning

Als Manuskript gedruckt! DK 624.04

Eingang: 23. 12. 1959

# Anwendung der Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied für die Berechnung der schiefen Platten[1])

Von Z. P. Bažant

*Formulierung des Problems als Randaufgabe. Zusammenstellung der Differenzenäquivalenten von Differentialoperatoren bei angenommenem Dreiecksgitter, besonders von Randdifferentialoperatoren für freien Rand. Kurze Erklärung der Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied, die den Relaxationsprozeß wesentlich beschleunigt. Lösung des Gleichungssystems mittels vorgeschlagener Methode, wobei das System für die vorher unbekannten veränderlichen Belastungsglieder relaxiert wird und zur Lösung für die gegebenen Belastungsglieder dann mit Linearkombinationen übergangen wird. Zahlenbeispiel der Berechnung einer durch eine mittige Einzellast oder durch gleichmäßige Belastung belasteten Platte mit zwei freien Rändern.*

Die Aufgabe der Berechnung einer schiefen Platte, ebenso wie eine ganze Reihe anderer Aufgaben der technischen Praxis, kann man als eine sogenannte Randaufgabe ansehen. Es gilt, die Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit gegebenen Randbedingungen zu formulieren. Eine genaue Lösung dieser Aufgabe erwies sich bisher als unausführlich. Dem Techniker genügt aber die Näherungslösung.

Wir werden diese Aufgabe mittels Differenzenmethode mit Hilfe des Gitters lösen, wobei die Berechnung des Systems von linearen Gleichungen mittels Relaxationsmethode erfolgt [1a]. Unsere Erwägungen werden sich hauptsächlich mit komplizierteren Fällen, besonders aus Stahlbeton hergestellten schiefen Platten, befassen, und zwar mit Platten mit freien Rändern. Dabei wird ein Dreiecksgitter angewendet, für das wir die Differenzenbezeichnung der entsprechenden Differentialoperatoren und der Randbedingungen ableiten werden und die Zusammenstellung der Endoperatoren für den Rand durchführen werden. Besonders gezeigt werden dann die Vorteile des vom Autor vorgeschlagenen Relaxationsverfahrens mit veränderlichem Belastungsglied, welches die Konvergenz des Relaxationsprozesses wesentlich beschleunigt und nicht nur für die Plattenberechnungen, sondern auch für mehrere andere Relaxationslösungen vorteilhaft ist. Abschließend werden wir zahlenmäßig ein konkretes Beispiel einer schiefen Platte lösen, die auf zwei parallelen Rändern gelenkartig und auf den übrigen beiden Rändern frei aufgelagert ist und durch eine in der Mitte wirkende Einzellast oder durch gleichmäßige Belastung belastet ist.

### Formulierung der Aufgabe

Die Durchbiegungsfläche der Platte wird in rechtwinkligen Koordinaten durch die partielle Differentialgleichung

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \tag{1}$$

beschrieben mit Randbedingungen, die der Auflagerungsart der Platte zu entsprechen haben [1], [1a], [2]. Dabei bezeichnen wir mit $w$ die Durchbiegungsordinate, mit $q$ die Belastung pro Flächeneinheit, mit $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$ den biharmonischen Operator und mit $D = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)}$ die Plattensteifigkeit, wo $\mu$ die Poissonsche Zahl und $d$ die Plattendicke bedeuten. Liegt der Rand parallel zur Achse $x$ und senkrecht zur Achse $y$, ergeben sich die Randbedingungen für den Punkt $X$ eines geraden Plattenrandes wie folgt:

1. Gelenkauflagerung

$$w = 0 \tag{2a}$$
$$w_{yy} = 0 \tag{2b}$$

2. Einspannung

$$w = 0 \tag{3a}$$
$$w_y = 0 \tag{3b}$$

3. Freier Rand

$$w_{yy} + \mu w_{xx} = 0 \tag{4a}$$
$$w_{yyy} + (2-\mu)\, w_{xxx} = 0 \tag{4b}$$

Zur Lösung schiefer Platten kann man verschiedene Arten von Gittern verwenden. Auf den ersten Blick kommt ein schiefwinkliges Gitter in Erwägung, aber es lassen sich mit Vorteil auch rechteckige oder quadratförmige Gitter verwenden. Für unsere Lösung wählen wir jedoch ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken. Zu diesem Zwecke müssen wir vorerst die Differenzenoperatoren zusammenstellen, die mit gewisser Genauigkeit die Differentialoperatoren ersetzen, die die Differentialgleichung der Aufgabe und die Randbedingungen bilden[1]).

[1]) Vortrag, gehalten anläßlich der Deutsch-Tschechoslowakischen Hochschultage (6. bis 11. Oktober 1959) in der TH Dresden.

[1]) Die Lösung mittels Zerlegung der Gl. (1) 4. Ordnung in zwei Gleichungen 2. Ordnung ist hier unmöglich, weil die Randbedingungen für die Momentensumme nicht bekannt sind.

[1a] Bažant, Z. P.: Relaxační řešení šikmých desek s volnými okraji. (Relaxationslösung schiefer Platten mit freien Rändern.) Inženýrské stavby 1958, č. 8, Praha.

[1] Beyer, K.: Die Statik im Stahlbetonbau. 3. Aufl. Berlin: Springer 1956.

[2] Timoshenko, S. P.: Theory of plates and shells. New York 1940.

### Das Dreiecksgitter

Vorerst drücken wir den Operator $\nabla^4$ durch Differenzen aus. Wenn wir für den Punkt $k$ mit den Koordinaten $(x_k, y_k)$ die Taylorsche Entwicklung der Funktion $w$ vom Ausgangspunkt der Koordinaten niederschreiben, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w_k = w_0 &+ x_k w_x + y_k w_y + \frac{1}{2}(x_k^2 w_{xx} + 2x_k y_k w_{xy} + y_k^2 w_{yy}) + \\ &+ \frac{1}{6}(x_k^3 w_{xxx} + 3x_k^2 y_k w_{xxy} + 3x_k y_k^2 w_{xyy} + y_k^3 w_{yyy}) + \\ &+ \frac{1}{24}(x_k^4 w_{xxxx} + 4\, x_k^3 y_k w_{xxxy} + 6\, x_k^2 y_k^2 w_{xxyy} + \\ &\qquad + 4\, x_k y_k^3 w_{xyyy} + y_k^4 w_{yyyy}) + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

wo $w_y$, $w_{xx}$, $w_{xyy}$ usw. die Derivationswerte im Ausgangspunkt bedeuten.

Wir erwägen eine sternartige Gruppe Gitterpunkte mit Koordinatenachsen, die entsprechend Bild 1 bezeichnet

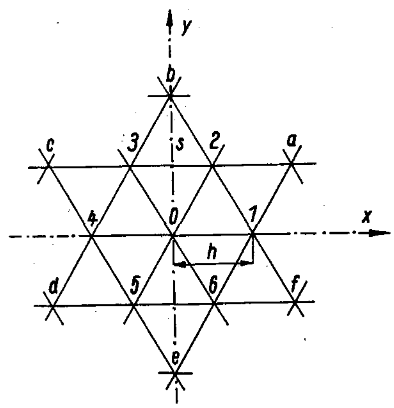



Bild 1 Sterngruppe für den Punkt 0

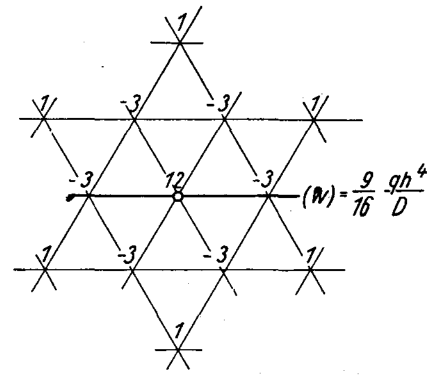
sind. Die Gitterseite bezeichnen wir $h$. Wenn wir in die Gl. (5) für die Punkte 1, 2 ... 6, a, $b$ ... $f$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} &1 \equiv (h, 0),\ 2 \equiv \left(\frac{h}{2}, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\ 3 \equiv \left(-\frac{h}{2}, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right), \\ &4 \equiv (-h, 0),\ 5 \equiv \left(-\frac{h}{2} - \frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\ 6 \equiv \left(\frac{h}{2}, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right) \\ &a \equiv \left(\frac{3}{2}h, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\ b \equiv \left(0, h\sqrt{3}\right),\ c \equiv \left(-\frac{3}{2}h, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right), \\ &d \equiv \left(-\frac{3}{2}h, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\ e \equiv \left(0, -h\sqrt{3}\right),\ f \equiv \left(\frac{3}{2}h, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

einsetzen, erhalten wir auf diese Weise die Taylorschen Entwicklungen für die Funktionswerte $w_1, w_2 \ldots w_6, w_a, w_b \ldots w_f$. Aus diesen Werten entwickeln wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} 12\, w_0 - 3\,(w_1 + w_2 + \cdots + w_6) + w_a + w_b + \cdots + w_f = \\ = \frac{9}{16} h^4 \nabla^4 w + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

in dem ein Rest der sechsten Ordnung zurückbleibt [3]. Wenn wir in diese Gleichung, die den Operator $\nabla^4$ bestimmt, für $\nabla^4 w$ entsprechend der Gl. (1) einsetzen, erhalten wir für einen bestimmten Punkt die Differenzengleichung des Gleichgewichts, die wir symbolisch in der Form der Sterngruppe




(8)

niederschreiben. Bei der Belastung durch eine Einzellast $P$ im Knotenpunkt des Gitters ersetzen wir mit einer gewissen Approximation die Wirkung der Last $P$ durch eine gleichmäßige, auf der Fläche des Sechsecks *mnopqr* wirkende Belastung q, deren Resultante der Einzellast $P$ gleichkommt (Bild 5). Dieses Sechseck hat seinen Mittelpunkt im Knotenpunkt des Gitters. Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises beträgt $\frac{h}{2}$. Die Ecken des Sechsecks sind Mittelpunkte der Gitterdreiecke, und seine Fläche ist somit $F = \frac{h^2\sqrt{3}}{2}$.

Wir können also schreiben

$$q = \frac{P}{F} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{P}{h^2}.$$

Nach Einsetzung der Gl. (8) erscheint die rechte Seite, d. h. das Belastungsglied, in der Form

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{Ph^2}{D}. \tag{8'}$$

Wir bestimmen nunmehr den Differenzenausdruck für die Bedingung (4a) des freien Randes für den Fall, daß dieser mit der Achse $x$ identisch ist und die Platte unterhalb der Achse liegt. Aus der Gl. (5) können wir durch Einsetzen entsprechend (6) die Ausdrücke

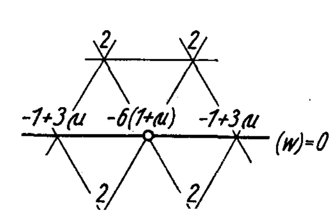
$$w_2 + w_3 + w_5 + w_6 = 4\, w_0 + 2\left(\frac{h^2}{4} w_{xx} + \frac{3\, h^2}{4} w_{yy}\right) + \cdots \tag{9}$$

$$w_1 + w_4 = 2\, w_0 + h^2 w_{xx} + \cdots \tag{10}$$

bilden. Multiplizieren wir die Gl. (9) mit zwei und die Gl. (10) mit dem Faktor $(3\,\mu - 1)$ und addieren wir dann die beiden, so erhalten wir nach entsprechender Behandlung die Randbedingung (4a) in der Form

$$\begin{aligned} 3\, h^2 (w_{yy} + \mu\, w_{xx}) = 2\,(w_2 + w_3 + w_4 + w_6) + \\ + (3\,\mu - 1)\,(w_1 + w_4) - 6\,(1 + \mu)\, w_0 = 0 \end{aligned}$$

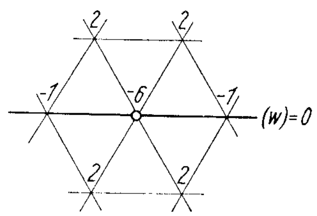
oder können sie auch in der nachfolgenden Sternform ausdrücken:




(11)

[3] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin: Springer 1951.

Erwägen wir eine Stahlbetonplatte, so können wir in den Randbedingungen näherungsweise annehmen, daß $\mu = 0$ ist, da $\mu$ in den Randbedingungen keinen wesentlichen Einfluß ausübt und ziemlich klein ist ($\mu = 0{,}08 \div 0{,}25$). Dann vereinfacht sich die Gl. **(11)** auf




**(11a)**

Hierauf stellen wir den Ausdruck für die Bedingung **(4b)** zusammen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir aus der Gl. **(5)** durch Einsetzung nach **(6)** die Ausdrücke

$$w_2 + w_3 - w_5 - w_6 = 2\sqrt{3}\,h w_y + \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 (w_{xxy} + w_{yyy}) + \cdots \tag{12}$$

$$w_a + w_c - w_d - w_f = 2\sqrt{3}\,h w_y + \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 (9\,w_{xxy} + w_{yyy}) + \cdots \tag{13}$$

$$w_b - w_e = 2\sqrt{3}\,h w_y + \sqrt{3}\,h^3 w_{yyy} + \cdots \tag{14}$$

deren Fehler sich höchstens in der vierten Ordnung halten. Wenn wir aus Gl. **(14)** $w_y$ errechnen und in die Gl. **(12)** und **(13)** einsetzen, erhalten wir für $w_{xxy}$ und $w_{yyy}$ ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten

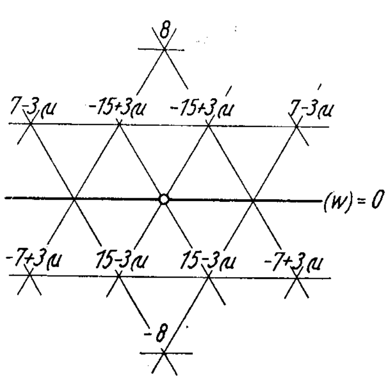
$$w_2 + w_3 - w_5 - w_6 - w_b + w_e = \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 (w_{xxy} - 3\,w_{yyy}) \tag{15}$$

$$w_a + w_c - w_d - w_f - w_b + w_e = \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 (9\,w_{xxy} - 3\,w_{yyy}). \tag{16}$$

Multiplizieren wir die Gl. **(15)** mit dem Faktor $(-15 + 3\,\mu)$ und die Gl. **(16)** mit dem Faktor $(7 - 3\,\mu)$ und addieren dann beide, so erhalten wir nach entsprechender Behandlung die Randbedingung **(4b)** in der Form

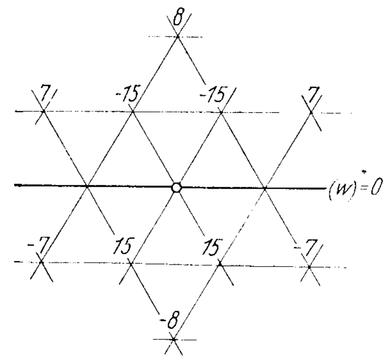
$$\frac{\sqrt{3}}{4} h^3 \cdot 24\,[w_{yyy} + (2 - \mu)\,w_{xxy}] =$$
$$= -(15 - 3\,\mu)\,(w_2 + w_3 - w_5 - w_6) + 8\,(w_b - w_e) + $$
$$+ (7 - 3\,\mu)\,(w_a + w_c - w_d - w_f) = 0$$

oder




**(17)**

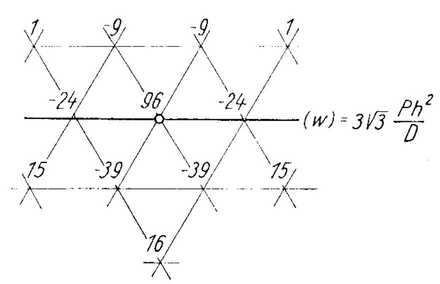
Für Stahlbetonplatten können wir wiederum annehmen, daß $\mu = 0$ ist, und man erhält




**(17a)**

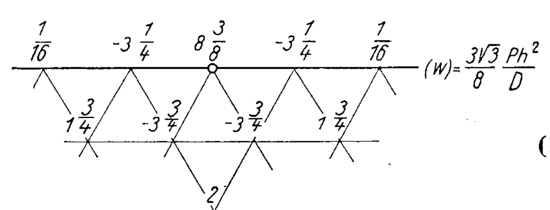
Schreiben wir nun das System der Differenzengleichungen für alle Knoten des Gitters auf, so treten in ihnen als Unbekannte gewisse fiktive Werte der Funktion $w$ in außerhalb der Platte liegenden Punkten auf, und zwar beim freien Rand in zwei mit dem Rand parallelen Reihen, als ob die Durchbiegungsfläche außerhalb der Platte verlängert wäre (Bild 5). Diese Werte sind durch die Randbedingungen gebunden, die wir an das System der Differenzengleichungen, deren Anzahl sich dadurch vergrößern würde, anschließen müßten. Das kann von vornherein vermieden werden, wenn es uns gelingt, die beiden Randbedingungen **(11)** und **(17)**, resp. **(11a)** und **(17a)** mit der Gl. **(8)** derart zu vereinigen, daß die Werte $w$ in den außerhalb der Platte liegenden Knoten des Gitters eliminiert werden. Man erhält dann den Endoperator für einen Punkt des freien Randes[2]). Bei $\mu = 0$ kann dies folgenderweise durchgeführt werden:

Wenn wir die Gl. **(17a)** von der mit 8 multiplizierten Gl. **(8)** subtrahieren, ergibt das:




**(18)**

Addieren wir hier die dreimal für die Punkte 4, 0, 1 (Bild 1) geschriebene und sukzessive mit $(-\,{}^1/_2)$, 5 und $(-\,{}^1/_2)$ multiplizierte Gl. **(11a)**, so erhalten wir schließlich nach Division durch 8:




**(19)**

---

[2]) Dies entspricht der **Gaußschen** Elimination der Werte w außerhalb der Platte in dem um die Randbedingungen vergrößerten System der Gleichungen.

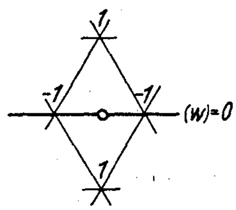
Schreiben wir die Gl. (8′) für einen Knoten in der ersten Reihe vom freien Rande (Bild 5) nieder, so tritt in derselben als Unbekannte auch der Wert $w$ in einem Knoten außerhalb der Platte auf, und zwar im Punkte $b$, wie aus Bild 1 ersichtlich ist. Der Koeffizient dieses Wertes beträgt 1. Da dieser Koeffizient klein ist, können wir ihn in die Knoten innerhalb der Platte überführen, und zwar mittels der Randbedingung (**4a**), die wir in der folgenden Weise vereinfachen werden. Liegen die Punkte 2 und 3 (Bild 1) auf dem freien Rande und bezeichnen wir den Mittelpunkt der Strecke $\overline{23}$ mit $s$, dann können wir die Bedingung (**4a**) für den Punkt $s$ bei $\mu = 0$ in der Form

$$h^2\, w_{yy} = w_b - 2\, w_s + w_0 = 0 \qquad (20)$$

schreiben. Setzen wir den Verlauf der Funktion $w$ zwischen den Punkten 2, 3 linear voraus[3]), so ist $2\, w_s = w_2 + w_3$ und somit nach Einsetzung in die Gl. (**20**)

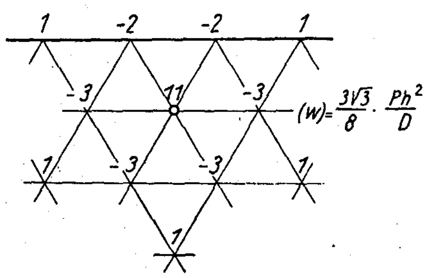
$$w_b - w_2 - w_3 + w_0 = 0$$

oder




(21)

Subtrahieren wir diese für den Mittelpunkt der Strecke 23 geschriebene Gleichung im Operator (**8**), dann erhalten wir für die Knoten in der ersten Reihe vom freien Rande die Endgleichung des Gleichgewichts




(22)

Beim gelenkig gelagerten Rand führen wir nun die Randbedingungen (**2a, b**) ein. Wenn dieser Rand mit einer Gitterlinie zusammenfällt, wie z. B. bei der Platte und dem Gitter auf den Bildern 4 und 5, können wir die für den Punkt 5 (Bild 2) festgehaltene Bedingung (**2b**) differenzenmäßig ausdrücken:

$$h^2\, w_{yy} = w_1 - 2\, w_s + w_2 = 0$$

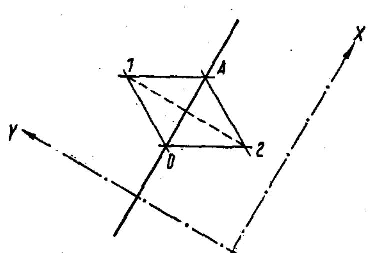



Bild 2 Der mit einer Gitterlinie identische Gelenkrand

Da nach (**2a**) $w_s = 0$ ist, erhalten wir

$$w_1 = -w_2 \qquad (23)$$

Bei einem allgemeinen Winkel $\alpha\, |\alpha \neq 60°|$ ist die Verwendung des Dreieckgitters etwas schwieriger. Den freien Rand legen wir immer auf Gitterlinien, der gelenkig gelagerte Rand geht aber dann im allgemeinen nicht durch die Knoten des Gitters. Setzen wir voraus, daß der Verlauf der Funktion $w$ zwischen den Punkten 2 und 3 (Bild 3) linear ist und führen wir weiter durch den Punkt 1 eine Senktreche 1ba zum Rand der Platte, dann entspricht das

$$w_a = w_2 \frac{\overline{a3}}{\overline{23}} + w_3 \frac{\overline{a2}}{\overline{23}}.$$

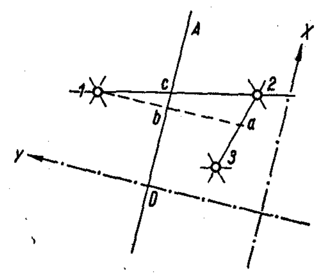



Bild 3 Gelenkrand in allgemeiner Lage zum Gitter

Setzen wir außerdem einen linearen Verlauf der Funktion $w$ zwischen den Punkten 1, $a$ voraus, so wird die Bedingung $w_{yy} = 0$ (im Punkte $b$) erfüllt. Dann ist

$$w_1 = -\frac{\overline{1b}}{\overline{ab}}\, w_a. \qquad (24)$$

Weicht jedoch die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte des Gitters (es muß keine Gitterlinie sein), wie z. B. 1 und 2, nicht zu sehr von der Senkrechten zum Rande ab, dann können wir mit einer gewissen Approximation voraussetzen, daß der Verlauf der Funktion $w$ entlang dieser Verbindungslinie linear sein wird. Das ergibt

$$w_1 = -\frac{\overline{1c}}{\overline{2c}}\, w_2. \qquad (25)$$

**Lösung des Systems mittels Relaxationsmethode**

Sind die nötigen Differenzenoperatoren bekannt, dann vermögen wir schon zur Lösung der Platte zu schreiten. In dem Bereiche, der berechnet wird, führen wir ein Gitter ein und numerieren seine Knoten. Durch Aufschreiben der Differenzengleichungen für die entsprechenden Gitterpunkte erhalten wir im allgemeinen ein System von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten, das wir mittels Relaxationsmethode lösen. Die absoluten Glieder dieser Gleichungen stellen die sog. Belastungsglieder $Z$ dar (die rechte Seite der Gl. (**8**) resp. der Ausdruck (**8′**)).

Jede dieser Gleichungen hat also die allgemeine Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, w_i = Z_k, \qquad k = 1, 2, \cdots n, \qquad (26)$$

wo $a_{ik}$ die Koeffizienten bei den Unbekannten $w_i$ bedeuten. Die Gl. (**26**) können wir als Gleichgewichtsbedingung für den betreffenden Punkt $k$ betrachten. Die Koeffizien-

[3]) Diese Voraussetzung ist grob approximativ, aber man erhält damit die Koeffizienten als ganze Zahlen.

ten jeder Gleichung tragen wir in die entsprechende vertikale Kolonne der sog. Relaxationstabelle ein (z. B. Tabelle 1). Wählen wir gewisse Werte von $w_1, w_2 \ldots w_n$, dann werden die Gl. (26) selbstverständlich nicht erfüllt. Damit die Gleichheit eintritt, müssen wir in jeder Gleichung zum Belastungsglied $Z_k$ noch irgendein weiteres Glied $R_k$ hinzufügen, das wir „Residuum" benennen. Es ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} w_i = Z_k + R_k. \tag{27}$$

Die vertikale Kolonne der Relaxationstabelle bildet dann den sogenannten Residualoperator, weil er den Wert des Residuums in bestimmten Gitterpunkten mit Hilfe der Werte $w_i$ angibt. Ändern wir jetzt einen Wert $w_i$ um $\Delta w_i$, so bestimmt die $i$-te Zeile der Tabelle, wie die rechten Seiten verändert werden müssen, um die Gleichheit aufrechtzuerhalten, dann bedeutet dies, daß sie die Veränderungen $\Delta R_k$ der Residuen $R_k$ bestimmt. Die Zeilen der Tabelle stellen dann die sog. Relaxationsoperatoren dar, die den Einfluß der Durchbiegungsveränderung in einem bestimmten Punkte auf die Werte der Residuen in diesem Punkte und in den umgebenden Punkten angeben. Bei der Relaxation schreiten wir so fort, daß wir die sukzessiven Veränderungen $\Delta w_i$ der Werte $w_i$ so durchführen, daß wir die Residuen sukzessive bis zum Nullwerte (praktisch zu genügend kleinen Werten) verkleinern und wir dadurch zur Lösung gelangen [4], [5], [6], [7].

Bei der Wahl der Relaxationsschritte, d. h. der Veränderungen der Werte $w_i$, benützen wir mit Vorteil die physikalische Vorstellung. Weil jede Gleichung eine Gleichgewichtsbedingung für einen betreffenden Punkt darstellt, vermögen wir uns vorzustellen, daß sich aus der Belastung $Z_k + R_k$ in jedem Gitterpunkt der Teil $R_k$, nämlich das Residuum, als Reaktion irgendwelcher fiktiven Stützen überträgt, mittels deren wir die Platte in jedem Punkte des Gitters stützen könnten, und daß der Teil $Z_k$, d. h. das Belastungsglied, die vorgeschriebene unveränderliche äußere Belastung ist.

Das Relaxationsverfahren bedeutet dann nichts anderes, als daß wir sukzessiv die fiktiven Stützen frei machen (bei jedem Schritt ein Teil der Reaktion jeder Stütze), um sie schließlich zu beseitigen.

Die Relaxationsmethode bringt im Vergleich mit den anderen sukzessiven Methoden den Vorteil, daß sie die Gruppen und Blockoperationen benützt, bei denen wir die Veränderung mehrerer Werte $x_i$ auf einmal durchführen. Das beschleunigt bedeutend den Relaxationsprozeß, hauptsächlich bei umfangreicheren Gittern. Aber in gewissen Fällen, wie bei den von uns untersuchten schiefen Platten, werden die Residuen in die umgebenden Punkte nicht als genügend kleinere Werte übergeführt. Die Auswahl der Gruppenrelaxationsschritte ist dann schwierig, und der Prozeß schreitet sehr langsam fort. Nunmehr gilt es zu zeigen, wie der Relaxationsprozeß in zahlreichen Fällen, besonders in Fällen mit langsamem Verlauf der Relaxation, durch die nachfolgend entworfene Methode bedeutend beschleunigt werden kann.

**Relaxation mit veränderlichem Belastungsglied**

Die Methode der Elimination der Residuen bei der Relaxation besteht darin, daß wir die Residuen zu den Randpunkten überführen, wo wir sie mittels Blockrelaxationen entfernen. Je größer die Anzahl solcher Punkte ist, desto schneller schreitet die Relaxation fort[4]). Wenn es nur wenige solcher Punkte gibt, wie dies z. B. bei einem Teil eines größeren symmetrischen Gitters der Fall ist, oder wenn die Randbedingungen komplizierter sind, wie z. B. bei einer schiefen Platte, ist der Fortschritt der Relaxation verlangsamt. Würde es also gelingen, gewissen weiteren Punkten des Gitters den Charakter von Randpunkten zu geben, oder irgendwelche weiteren imaginären Punkte einzuführen, die den Charakter von Randpunkten hätten, dann würden wir die Relaxation dadurch bedeutend beschleunigen. Gerade dies wird durch die Relaxation mit veränderlichem Belastungsglied ermöglicht. Diejenigen Punkte, die den Charakter von Randpunkten haben, d. h. solche, in denen wir die Residuen leicht entfernen können, bezeichnen wir als „Singularpunkte" des Gitters. Es können entweder direkt Punkte des Gitters oder irgendwelche weitere fiktiven Punkte sein.

A.

Damit irgendein Punkt des Gitters Singularpunkt des Gitters wird, genügt es, wenn wir in Gl. (27) den Ausdruck $Z_k + R_k$ als das bei dem gegebenen Durchbiegungszustand zur Erreichung des Gleichgewichts notwendige Belastungsglied $\bar{Z}_k$ erklären (es ist die physikalische Vorstellung der in Durchführung begriffenen Operation). Bei der Bezeichnung

$$\bar{Z}_k = Z_k + R_k \tag{28}$$

erhalten wir dann

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} w_i = \bar{Z}_k, \qquad k = 1, 2, \cdots n. \tag{29}$$

Um das Gleichgewicht im gegebenen Punkte zu erreichen, brauchen wir dann in diesem Punkte keine fiktive Stütze einzuführen. Dieser Punkt hat kein Residuum. Das Glied $\bar{Z}_k$ ist natürlich gemäß Gl. (29) veränderlich und kann nicht von vornherein gewählt werden, da nach jeder Veränderung $\Delta w_i$ der Werte $w_i$ eine andere Belastung zur Erreichung des Gleichgewichts nötig wird. Aus der Gl. (29) folgt, daß sich das Glied $\bar{Z}_k$ in gleicher Weise ändert wie das Residuum $R_k$ in diesem Punkte. Die Veränderung des Gliedes $\bar{Z}_k$ ist dabei nebensächlich. In diesen Punkt können wir die Residuen überführen und dadurch, daß

[4] Collatz, L.: a. a. O. [3].
[5] Southwell, R. W.: Relaxation Methods in Engineering Science. A Treatise on approximate computation. Oxford Univ. Press 1940.
[6] Southwell, R. W.: Relaxation Methods in Theoretical Physics. A continuation of the treatise. Oxford 1946.
[7] Favre, H.: Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences. Mémoires de l'A.I.P.C. 1943/44, Zürich.

[4]) Bei der Relaxation geht die Entfernung der Residuen leicht vor sich, wenn diese im Gitter mit entgegengesetzten Vorzeichen verteilt sind. Nach einigen Relaxationsschritten verkleinern wir die Residuen und gleichen sie ohne Schwierigkeit auf Werte desselben Vorzeichens und annähernd derselben Größe aus. Dann ist der Vorgang schon schwieriger, und bei normaler Relaxation müssen wir die Residuen zum Rand „überführen". Das „Überführen" der Residuen zu den Rändern verstehen wir in der Weise, daß wir solche Relaxationsschritte vornehmen, die es ermöglichen, die Residuen in der Gittermitte klein und nur bei Rändern größer zu bekommen. An den Rändern können wir die Residuen mittels Blockrelaxation entfernen. Je näher die einzelnen Punkte dem Rande sind, oder je größer die Anzahl der Randpunkte ist, desto leichter können wir die Residuen zum Rande „überführen".

wir sie in das Belastungsglied $\overline{Z}_k$ einbeziehen, entfernen wir sie einfach. Durch die Veränderung des Wertes $w_i$ in diesem Punkte können wir auch die Werte der Residuen in den umgebenden Punkten beeinflussen. Die auf diese Weise durchgeführte Relaxationslösung hat dabei die Besonderheit, daß wir einen vorher nicht bekannten Belastungsfall lösen können. Erst wenn wir zum Resultat gelangen, erhalten wir gleichzeitig die Belastung, die die Endwerte $w_i$ hervorruft und die dann der gesuchte Endwert der Belastungsglieder $\overline{Z}_k$ ist.

Die Singularpunkte können wir natürlich nicht willkürlich wählen. Wir müssen bei der Wahl in der Weise vorgehen, daß wir von einem erlangten Zustand, eventuell von einigen erlangten Zuständen, zur Lösung der gegebenen Aufgabe gemäß dem Superpositionsprinzip, d. h. durch Linearkombinationen, übergehen und daß die ganze Lösung nicht mühsamer wird als ohne die Singularpunkte. Man kann zeigen, daß, wenn wir bei allgemeinen rechten Seiten $Z_k$ $r$ Singularpunkte wählen würden, wir die Relaxation $(r + 1)$ mal durchführen müßten, damit wir $(r + 1)$ linear unabhängige Belastungszustände erhalten. Wählen wir bei einer speziellen rechten Seite, wenn von den Gliedern $Z_k$ nur $r$ Glieder einen von Null abweichenden Wert besitzen, in den betreffenden Punkten Singularpunkte, dann müssen wir die Relaxation $r$mal durchführen [8][5]). Sofern wir also nur eine einzige nicht Null gleichende rechte Seite haben (Belastung der Platte nur durch eine Einzellast) und wenn wir in diesem Punkte einen Singularpunkt des Gitters wählen (d. h. veränderliche Belastung), so genügt es, die Relaxation nur einmal vorzunehmen. Bei der Wahl mehrerer Singularpunkte kann die Relaxation jedoch auch vorteilhaft sein, und zwar dann, wenn die Ersparnis aus der Beschleunigung des Vorganges größer ist als der Verlust aus der mehrfach wiederholten Relaxation.

### B.

Die Residuen in den einzelnen Punkten des Gitters können wir auch auf die Weise beeinflussen, daß wir einen $\bar{x} \cdot Z_k$ großen Teil von ihnen in den einzelnen Punkten als äußere Belastung betrachten und ihn zu den gegebenen Belastungsgliedern $Z_k$ hinzufügen. Wenn wir eine solche Veränderung der Belastung vornehmen, hat das äußere Belastungsglied bei allen Relaxationsschritten allgemein die Form

$$\overline{Z}_k = \bar{x} Z_k, \qquad k = 1, 2, \cdots n, \tag{30}$$

wobei $\bar{x}$ ein veränderlicher Koeffizient ist. Es handelt sich hier also wieder um eine Veränderung der äußeren Belastung (es verändern sich alle Belastungsglieder $\overline{Z}_k$). Dieser Fall kann auch mit dem vorhergehenden Falle des Singularpunktes in Zusammenhang gebracht werden. Stellen wir uns vor, daß alle Knoten des Gitters mit irgendeinem weiteren fiktiven Punkt verbunden sind, dem wir durch Vermittlung des Relaxationsoperators ($Z_1$, $Z_2$ ... $Z_n$), wie z. B. auf den letzten zwei Zeilen in Tabelle 1, den Wert des Koeffizienten $\bar{x}$ zuteilen. Der Veränderung $\Delta x$ des Wertes des mit diesem Punkte verbundenen Koeffizienten $\bar{x}$ entsprechen dann die Veränderungen der Residuen $\Delta x \cdot Z_1$, $\Delta x \cdot Z_2$ ... $\Delta x \cdot Z_n$. Dieser Punkt hat eine analoge Bedeutung wie der Singularpunkt im Absatz A, und wir bezeichnen ihn als uneigentlichen Singularpunkt des Gitters. Zu diesem Punkte tragen wir den Wert des Koeffizienten $\bar{x}$ der äußeren Belastung ein, oder im Falle einer gleichmäßigen Belastung den Wert des Belastungsgliedes, die im Verlauf der Relaxation veränderlich sind.

Diese Art der Relaxation mit veränderlichem Belastungsglied ist von Vorteil, wenn die rechten Seiten der Gl. (26) alle gleich sind (z. B. gleichmäßig belastete Platte, Torsion) oder wenigstens dieselben Vorzeichen und annähernd dieselben Werte haben. Bei der Relaxation jedes Gitters entfernen wir die Residuen sehr leicht, wenn ihre Vorzeichen verschieden sind. Nach einigen Relaxationsschritten gleichen wir die Residuen in ein beiläufig gleiches Niveau und gleiches Vorzeichen aus. Der weitere Vorgang ist dann normalerweise schon schwierig und erfordert Blockrelaxationen. Den durch Abschätzung bestimmten Mittelwert dieser Residuen überführen wir dann in das veränderliche Belastungsglied $\overline{Z}$, dessen augenblicklicher Zustand nach jedem Relaxationsschritt das Gleichgewicht darstellt. So erhalten wir im Verlauf eines einzigen Schrittes den Zustand der Residuen, in dem dieselben wiederum verschiedene Vorzeichen besitzen, aber schon bedeutend kleiner sind. In gleicher Weise können wir fortfahren. Als Resultat erhalten wir einen Belastungszustand in der Form ($x Z_1$, $x Z_2$ ... $x Z_n$), wo $x$ den Endwert des veränderlichen Koeffizienten $\bar{x}$ bedeutet. Für die gegebene Belastung bestimmen wir dann die Lösung gemäß direkter Proportionalität.

Wir können also zusammenfassen, daß die Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied, die eigentlich eine Verallgemeinerung der normalen Relaxationsmethode ist, den Vorteil bringt, daß sie weitere Gitterpunkte mit dem Charakter der Randpunkte zur Verfügung stellt, in die wir dann die Residuen überführen können, und mit deren Hilfe wir die umgebenden Residuenwerte zu beeinflussen vermögen. Bei einem einzigen von Null verschiedenen Belastungsglied verkleinert sich auch die Anzahl der linearen Gleichungen um eins, auch wenn die Methode als Relaxationsmethode nicht begriffen wird. Sie bedeutet dann dasselbe, als wenn wir ein Gitter mit einer um eins kleineren Anzahl der Punkte lösten. Von großem Vorteil ist seine Benutzung immer, wenn alle rechten Seiten gleich sind (z. B. gleichmäßig belastete

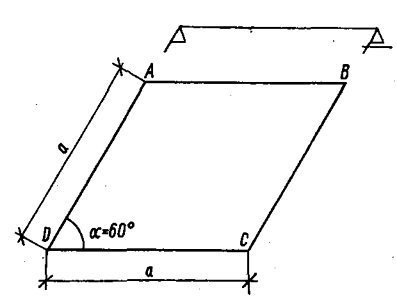



Bild 4 Die im praktischen Beispiel untersuchte Platte

[5]) Das Ziel, die resultierenden Belastungszustände linear unabhängig zu erhalten, um das Übergehen zum vorgeschriebenen Belastungszustand durch Linearkombinationen zu ermöglichen, erreichen wir gewöhnlich dadurch, daß wir verschiedene Ausgangswerte wählen.

[8] Bažant, Z. P.: Relaxace s proměnným zatěžovacím členem a její užití při řešení desek a problému kroucení (Relaxation mit veränderlichem Belastungsglied und seine Anwendung für die Platten- und Torsionsberechnungen — im Druck). Aplikace matematiky, 1960, Praha.

Platte, Torsion) oder wenn nur eine einzige rechte Seite von Null verschieden ist (eine Einzellast). In anderen Fällen ist seine Benützung nur dann vorteilhaft, wenn die Ersparnis aus der Beschleunigung der Lösung größer ist als der Verlust aus mehreren Relaxationsberechnungen. Die Möglichkeit dieser Lösungsmethode ist eigentlich durch die Gültigkeit des Superpositionsprinzips gegeben, das wiederum die Folge des linearen Hookschen Gesetzes bei elastischen Systemen ist. Sie kann auch genau und ziemlich einfach mit Hilfe der linearen Algebra mathematisch abgeleitet werden [9].

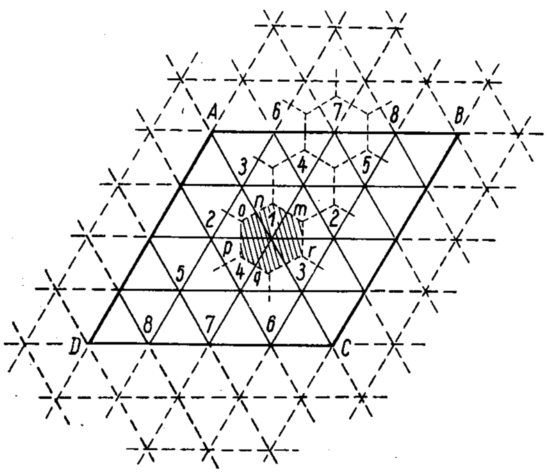



Bild 5 Einführung des Dreiecksgitters

[9] Bažant, Z. P.: a. a. O. [8].

**Lösung eines Zahlenbeispiels**

Als praktisches Beispiel erwägen wir eine schiefe, rhombusförmige Platte $ABCD$ mit der Seitenlänge $a$ und dem Winkel $\alpha = 60°$, die an den Rändern $AD$, $BC$ gelenkartig gelagert ist und die in $AB$ und $CD$ freie Ränder besitzt (Bild 4). Wir wählen ferner ein Dreieckgitter mit Seitenlänge $h = \frac{a}{4}$ (Bild 5). Die Platte, das Gitter und die nachfolgend in Betracht gezogene Belastung stehen symmetrisch zum Plattenmittelpunkt, so daß es genügt, nur eine Hälfte der Platte, d. h. acht Gitterpunkte, zu betrachten. Die Punkte numerieren wir symmetrisch zum Plattenmittelpunkt. Damit bestimmen wir schon von vornherein, daß auch alle vorzunehmenden Operationen symmetrisch sein werden. Setzen wir für die Punkte 1, 2 ... 8 die entsprechenden Differenzengleichungen an, dann erhalten wir ein System von 8 linearen Gleichungen mit 8 Unbekannten $w_1, w_2 \ldots w_8$ (Tabelle 1 — vertikale Kolonnen). Die absoluten Glieder dieser Gleichungen, d. h. die von der äußeren Belastung abhängigen Belastungsglieder $Z$, sind nicht in die Tabelle eingetragen.

1. Wir werden zunächst den Durchbiegungszustand für die Belastung durch eine Einzellast in der Plattenmitte betrachten. Diese Aufgabe ist äquivalent mit der Bestimmung der Einflußfläche der Durchbiegung in der Plattenmitte. In der Plattenmitte wählen wir das veränderliche Belastungsglied $\bar{Z}$, d. h., der Punkt 1 wird der singuläre Punkt des Gitters. Die übrigen Belastungsglieder sind gleich Null. Die Relaxationsberechnung nach der im vorigen Kapitel (Absatz A) erklärten Weise ist in Bild 6 durchgeführt worden. In die Kolonnen links des betreffenden Punktes tragen wir die Durchbiegungsveränderungen ein, rechts dann den augenblicklichen Stand der Residuen, wobei der 1. bis 9. Schritt in

Relaxationsschritte

| č. | $i$ | $\Delta w_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 6 | + 100 |
| 2 | 5 | + 50 |
| 3 | 3, 6 | + 30 |
| 4 | 8 | + 40 |
| 5 | 6, 7, 7 | + 20 |
| 6 | 1, 2 ··· 8 | + 50 |
| 7 | 3<br>4 | − 10<br>+ 10 |
| 8 | 2<br>7 | − 5<br>+ 5 |
| 9 | 1, 2, ··· 8 | + 20 |
| 10 | 7<br>2, 3 | + 10<br>− 10 |
| 11 | 4, 7, 8 | + 5 |
| 12 | 2 | − 3 |
| 13 | 1, 2, ··· 8 | + 4 |
| 14 | 2, 3, 4 | − 1 |
| 15 | 7 | + 4 |
| 16 | 6, 8 | + 3 |
| 17 | 7 | + 2 |
| 18 | 4, 5<br>2, 3, 6 | + 1<br>− 1 |

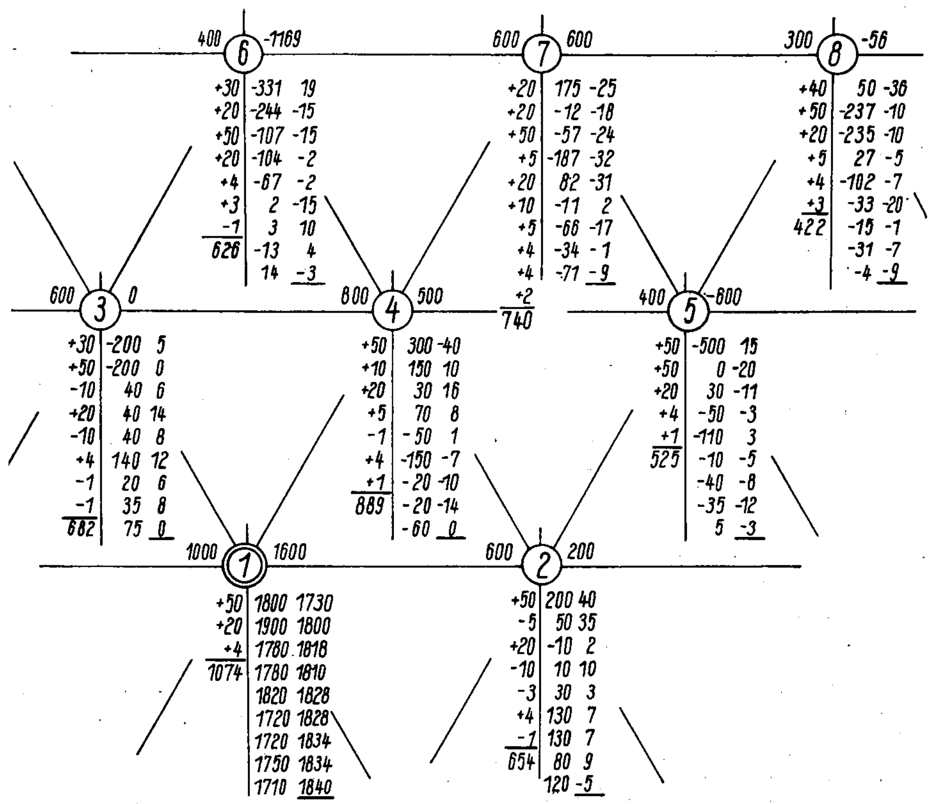



Bild 6 Relaxationsberechnung der durch mittige Einzellast belasteten Platte

Tabelle 1

**Relaxationstafel**

| $\Delta w_i$ \ $\Delta R_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | $-3$ | $-3$ | $-3$ | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | $-6$ | 11 | $-2$ | $-2$ | $-3$ | 0 | 2 | 0 |
| 3 | $-6$ | $-2$ | 10 | $-2$ | 0 | $-3\frac{13}{16}$ | $1\frac{3}{4}$ | 0 |
| 4 | $-6$ | $-2$ | $-2$ | 11 | $-3$ | $-3\frac{3}{4}$ | $-3\frac{3}{4}$ | $1\frac{3}{4}$ |
| 5 | 2 | $-3$ | 0 | $-3$ | 10 | $1\frac{3}{4}$ | $-3\frac{3}{4}$ | $-3\frac{3}{4}$ |
| 6 | 2 | 0 | $-2$ | $-2$ | 1 | $8\frac{3}{8}$ | $-3\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 7 | 0 | 1 | 1 | $-2$ | $-2$ | $-3\frac{1}{4}$ | $8\frac{3}{8}$ | $-3\frac{1}{4}$ |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | $-2$ | $\frac{1}{16}$ | $-3\frac{1}{4}$ | $6\frac{9}{16}$ |
| $\Sigma$ | $-2$ | 2 | 2 | $-2$ | 2 | $1\frac{3}{8}$ | $-1\frac{7}{8}$ | $1\frac{3}{8}$ |

der ersten, die weiteren in der zweiten Kolonne eingetragen werden. Auf der ersten Stelle in die linke Kolonne setzen wir die abgeschätzten Ausgangswerte der Durchbiegung und in die rechte Kolonne die Ausgangswerte der Residuen ein. Das veränderliche Belastungsglied $\bar{Z}$ im Punkte 1, in dem die Einzellast $P$ wirkt, ist formal in gleicher Weise eingetragen wie das Residuum in der rechten Kolonne beim Punkte 1.

In der Plattenmitte erhielten wir als Resultat den Durchbiegungswert 1074, der dem Endwert 1840 des Belastungsgliedes $\bar{Z}$ entspricht. Für das allgemeine Belastungsglied

$$Z = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,\frac{Ph^2}{D}$$

bestimmen wir laut der direkten Proportionalität die Durchbiegung $w_1$ in der Plattenmitte wie folgt:

$$w_1 = \frac{1074}{1840}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8\cdot 16}\,\frac{Pa^2}{D} = 0{,}0237\,\frac{Pa^2}{D}. \qquad (31)$$

Der Formänderungszustand der Platte, proportional umgerechnet für den Wert eins der Durchbiegung in der

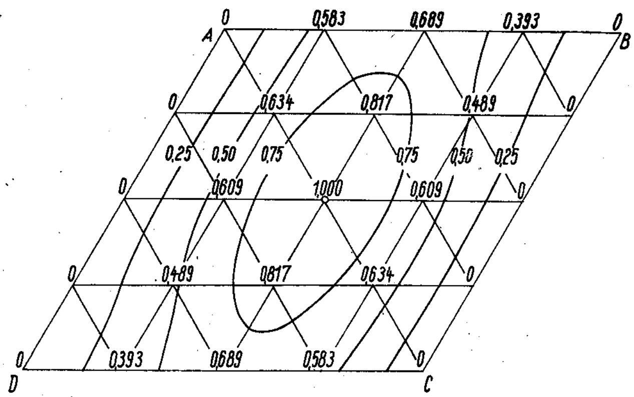



Bild 7 Die durch eine mittige Einzellast belastete Platte. Einflußfläche der Durchbiegung in der Plattenmitte

Relaxationsschritte

| č | $i$ | $\Delta w_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1, 4, 7 | 400 |
| 2 | $Z$<br>6, 7 | 400<br>100 |
| 3 | 4, 6 | 50 |
| 4 | 1, 2, 4, 8 | $-20$ |
| 5 | $Z$<br>1 | $-120$<br>$-10$ |
| 6 | 6<br>8 | 10<br>$-10$ |
| 7 | 3, 6, 7 | 5 |
| 8 | 5 | $-5$ |
| 9 | 6 | 10 |
| 10 | 2, 5, 8 | $-5$ |
| 11 | 1 | $-2$ |
| 12 | $Z$<br>4, 8 | 10<br>$-1$ |
| 13 | 8<br>$Z$ | $-1$<br>1 |

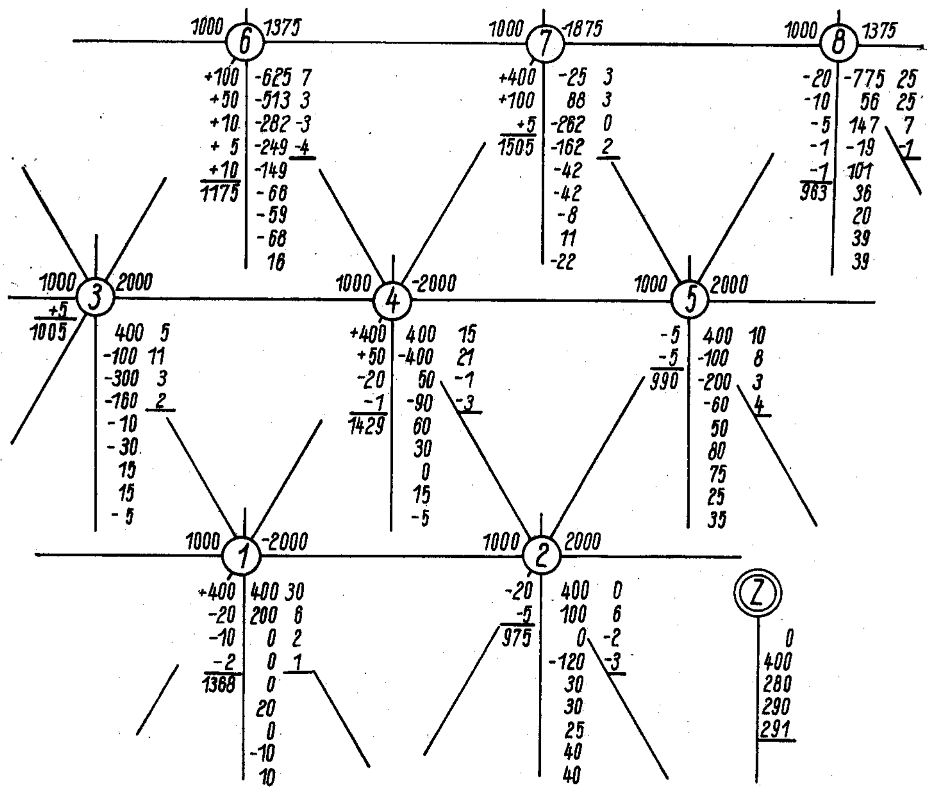



Bild 8 Relaxationsberechnung der gleichmäßig belasteten Platte

Plattenmitte, ist aus Bild 7 ersichtlich. Die Ordinaten $\eta(x, y)$ der Einflußfläche der Durchbiegung in der Plattenmitte erhalten wir, wenn wir die hier angeführten Werte $w_0(x, y)$ mit dem Wert **(31)** multiplizieren. Dann wird

$$\eta(x, y) = 0{,}0237 \frac{a^2}{D} \cdot w_0(x, y). \tag{32}$$

2. Nunmehr gilt es auch den Durchbiegungszustand für die gleichmäßige Belastung $q$ auf der ganzen Platte zu berechnen. Alle Belastungsglieder sind von Null verschieden und gleich. Die Berechnung nach der in vorigem Kapitel (Absatz B) erklärten Weise ist aus Bild 8 ersichtlich. Die Durchbiegungsveränderungen und die Residuen sind in gleicher Weise eingetragen, wie im vorigen Falle. Die Werte des veränderlichen Belastungsgliedes $Z$ sind seitens des Gitters beim singulären, mit zwei Kreisen bezeichneten Punkte des Gitters eingetragen. An erster Stelle befindet sich ihr Ausgangswert, an letzter ihr Endwert 291. Wenn wir noch den durchschnittlichen Wert der Residuen in die Belastungsglieder $Z$ einbeziehen, können wir ihren Endwert auf 290,7 korrigieren. Für den allgemeinen Wert der Belastungsglieder

$$Z = \frac{9}{16} \frac{qh^4}{D}$$

bestimmen wir dann nach dem Proportionalitätsgesetz die Durchbiegung in der Plattenmitte

$$w_1 = \frac{1368}{290{,}7} \cdot \frac{9}{16 \cdot 256} \frac{qa^4}{D} = 0{,}0103 \frac{qa^4}{D}. \tag{33}$$

Der Formänderungszustand der Platte, proportional umgerechnet für den Durchbiegungswert eins in der Plattenmitte, ist aus Bild 9 ersichtlich. Die größte Durchbiegung entsteht auf dem freien Rande. In der Plattenmitte liegt der Sattelpunkt der Durchbiegungsfläche. Die wirklichen Durchbiegungswerte erhalten wir, wenn wir die hier angeführten Werte mit dem Wert **(33)** multiplizieren.

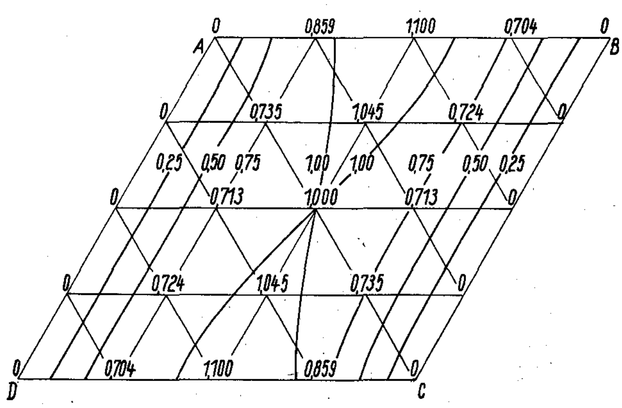



Bild 9 Biegefläche der Durchbiegung der Platte für die Belastung nach Bild 8

Wir können die Richtigkeit der Berechnung kontrollieren, wenn wir den Wert **(33)** mit dem aus der Einflußfläche der Durchbiegung ausgerechneten Durchbiegungswert in der Plattenmitte vergleichen. Es gilt nämlich

$$w_1 = \iint\limits_0 q\,\eta(x, y)\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0{,}0237 \frac{qa^2}{D} \iint\limits_0 w_0(x, y)\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{34}$$

wobei 0 den Plattenbereich bedeutet. Das letzte Flächenintegral können wir annähernd aus den Werten des Bildes 7 entnehmen. Ersetzt man die Durchbiegungsfläche durch ebene Flächen in den Dreiecken des Gitters, die in den Gitterpunkten gleiche Werte haben, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint\limits_0 w_0(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &\doteq \frac{h^2}{4}\sqrt{3} \cdot 2\,[0{,}583 + 0{,}689 + 0{,}393 + 0{,}634 + \\ &\quad + 1{,}000 + 0{,}634 + \\ &\quad + 2\,(0{,}817 + 0{,}489 + 0{,}609)] \\ &= 3{,}88\, h^2 \sqrt{3}\end{aligned}$$

und daher

$$w_1 = 0{,}0100 \frac{qa^4}{D}. \tag{35}$$

Das Flächenintegral kann man auch so ermitteln, daß man zunächst die Flächen der mit den Gitterlinien in der Richtung des Gelenkrandes parallelen Querschnitte bestimmt. Erwägen wir den Verlauf der Durchbiegungen in einem Querschnitte oberhalb der äußersten Gitterseiten linear und oberhalb der inneren parabolisch und den Verlauf des Inhalts in paralleler Richtung mit dem freien Rand zwischen den äußersten Querschnitten wieder linear und zwischen den inneren parabolisch, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint\limits_0 w_0(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &\doteq \frac{h}{2}\sqrt{3}\left[2{,}24\, h + \frac{h}{3}\,(2 \cdot 2{,}24 + 4 \cdot 3{,}38)\right] \\ &= 4{,}12\, h^2 \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$w_1 = 0{,}0106 \frac{qa^4}{D}. \tag{35'}$$

Trotz großer Approximativität der Berechnung stimmen die gefundenen Werte **(35)** und **(35′)** mit dem Wert **(33)** gut überein, weil die Abweichungen nur etwa $\pm 3\,\%$ erreichen. Damit wird zugleich auch die Richtigkeit der numerischen Berechnungen bestätigt.

Die Ausdrückung der Biegungs- und Drillungsmomente in einem bestimmten Punkte aus dem Formänderungszustand der Platte ist verhältnismäßig leicht. Es gelten hier nämlich die bekannten Formeln [10]

$$M_x = -D\,(w_{xx} + \mu\, w_{yy}) \tag{36}$$

$$M_y = -D\,(w_{yy} + \mu\, w_{xx}) \tag{37}$$

$$M_{xy} = -D\,(1 - \mu)\, w_{xy} \tag{38}$$

in die wir für $w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}$ die Werte der approximativen Derivationen (Bild 1) im Punkte 0 einsetzen.

$$w_{xx} = \frac{1}{h^2}\,(w_1 - 2\,w_0 + w_4) \tag{39}$$

$$w_{yy} = \frac{1}{3\,h^2}\,(-w_1 + 2\,w_2 + 2\,w_3 - w_4 + 2\,w_5 + 2\,w_6 - 6\,w_0) \tag{40}$$

$$w_{xy} = \frac{1}{h^2\sqrt{3}}\,(w_2 - w_3 + w_5 - w_6) \tag{41}$$

Die letzte Relation erhalten wir, wenn wir aus Gl. **(5)** den Ausdruck $w_2 - w_3 + w_5 - w_6$ durch Einsetzung gemäß **(6)** entsprechend formulieren. Die Relationen **(39)**, **(40)** ergeben sich aus den Gl. **(10)** und **(11a)**.

[10] Beyer, K.: a. a. O. [1].

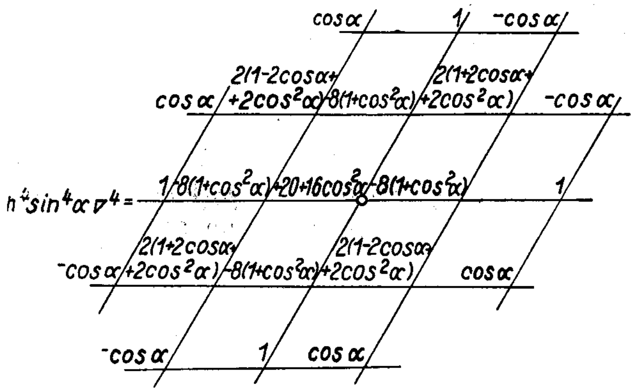



Bild 10 Differenzenoperator für Rhombusgitter

Zur Berechnung schiefer Platten verwendet man oft schiefwinklige Gitter [11]. Das vorhergehende Beispiel lösten wir auch mit Hilfe der Relaxationsmethode unter Verwendung eines schiefwinkligen Gitters, dessen Knoten mit unserem Dreiecksgitter identisch waren. Die Berechnung war schwierig, und es ergab sich aus derselben daß ein schiefwinkliges Gitter für die Relaxation der hier in Betracht gezogenen Platten wenig geeignet ist. Vorteilhaft für die Relaxation sind symmetrische Gitter, aus denen man symmetrische Operatoren erhält. Wenn wir dagegen in einem schiefwinkligen Gitter den Differenzenausdruck für den Operator $\nabla^4$ formulieren, stellen wir fest, daß er achsenmäßig unsymmetrisch ist und überdies bei einem allgemeinen Winkel $\alpha$ keine ganze Werte bildenden und auch keine rationalen Koeffizienten besitzt (Bild 10 und für $\alpha = 60°$ Bild 11). Die Operatoren der Randbedingungen eines freien Randes werden noch ungünstiger (für $\alpha = 60°$ und $\mu = 0$, Bilder 12,13). Vereinfachen wir die erste Bedingung durch einen linearen Ersatz des Verlaufes der Funktion $w$ beim Rande, so erhalten wir den resultierenden Randoperator, und zwar in der aus Bild 14 ersichtlichen Form. Die Operatoren auf den Bildern 11 oder 14 stellen gleichzeitig die Residualoperatoren dar, und wir sehen hier, daß bei der Freimachung des Punktes die Residuen mit zu großen Werten auf benachbarte Punkte verteilt werden, beim zweiten Operator sogar mit Werten, die die ursprünglichen Werte der Residuen übersteigen. Der Relaxationsprozeß konvergiert deswegen sehr langsam. Die Verringerung des maximalen Residuums erhalten wir periodisch erst nach einigen Relaxationsschritten. Die Veränderungen der Residuen müssen deswegen für einige solche Schritte von vornherein abgeschätzt werden. Die Operatoren für schiefwinklige Gitter weisen auch größere Fehler auf als die symmetrischer Gitter. Diese Fehler steigen desto mehr, je stärker $\alpha$ von 90° abweicht.

Beide Zahlenbeispiele zeigen, daß man die Berechnung trotz der Schwierigkeit der Randbedingungen schnell durchzuführen vermag. Das würde sich in größerem Maße bei der genaueren Berechnung mit feineren Gittern zeigen. Zur ganzen Berechnung brauchten wir nur 18 resp. 13 Relaxationsschritte. Die Berechnung mit Hilfe der normalen Relaxationsmethode würde hier vielfach schwieriger und umfangreicher und wäre unvorteilhaft. So ermöglicht die vorgeschlagene Verallgemeinerung der Relaxationsmethode, d. h. die Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied, nicht nur die wesentliche Beschleunigung der Berechnung, sondern auch die Anwendung der Relaxationsmethode für die Aufgaben, bei denen sie bisher ohne Vorteil war.

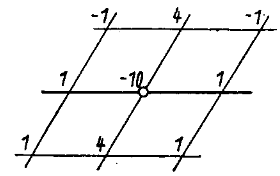



Bild 12 Operator für die Randbedingung (4a)

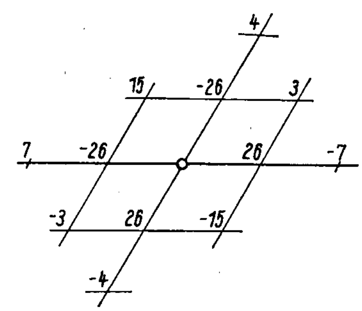



Bild 13 Operator für die Randbedingung (4b)

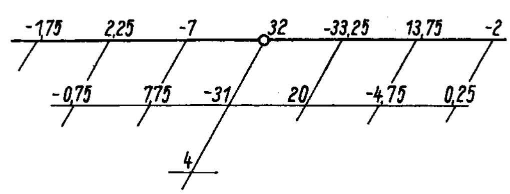



Bild 14 Endoperator für den freien Rand

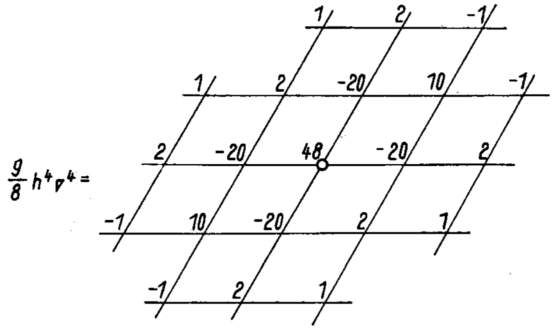



Bild 11 Vereinfachung des Differenzenoperators für $\alpha = 60°$

[11] Favre, H.: a. a. O. [7].

Verfasser:

Bažant, Z. P., Technische Hohschule Praha 2, Karlovo nam. 17.