

## RELAXAČNÍ ŘEŠENÍ ŠIKMÝCH DESEK S VOLNÝMI OKRAJI

(Práce odměněná I. cenou na II. studentské vědecké konferenci FIS, Praha)

Z. P. BAŽANT, posluchač FIS, Praha

*Sestavení diferenciálních operátorů a operátorů okrajových podmínek pro volný a kloubový okraj při trojúhelníkové síti. Řešení sítě relaxační metodou. Relaxace s proměnným zatěžovacím členem. Početní příklad.*

Šikmé desky jsou konstrukčním prvkem, kterého se dnes začíná hojně používat, a to hlavně u mostů při šikmém křížení dvou komunikačních tras nebo komunikace a vodního toku ap. [1]. V našich úvahách se budeme zabývat řešením šikmých desek, zvláště železobetonových, uložených na dvou rovnoběžných okrajích kloubově, na dvou zbývajících volně, a zatížených jedním osamělým břemenem uprostřed. Úloha v podstatě představuje tzv. okrajovou úlohu, tj. řešení parciální diferenciální rovnice s danými okrajovými podmínkami. Řešení této úlohy provedeme jednou z numerických metod řešení diferenciálních rovnic, a to metodou relaxační. Užijeme přitom trojúhelníkové sítě, pro níž odvodíme diferenční vyjádření příslušných diferenciálních operátorů a okra-

jových podmínek. Při relaxaci použijeme postupu s proměnným zatěžovacím členem, který značně urychluje konvergenci relaxačního procesu. V závěru numericky vyřešíme konkrétní příklad.

### Formulace úlohy

Průhybová plocha desky je v pravoúhlých souřadnicích dána parciální diferenciální rovnicí

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (1)$$

s okrajovými podmínkami odpovídajícími uložení desky. Přitom značíme  $w$  průhybovou pořadnici,  $q$  měrné zatížení,  $\nabla^4$  biharmonický operátor a

$$D = \frac{E d^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

válcovou tuhost desky, kde  $\mu$  značí

Poissonovo číslo,  $d$  tloušťku desky [6]. Okrajové podmínky pro bod  $X$  přímého okraje desky, je-li okraj rovnoběžný s osou  $x$  a osa  $y$  k němu kolmá, jsou tyto:

1. kloubové uložení

$$w = 0 \quad (2a)$$

$$w_{yy} = 0 \quad (2b)$$

2. vetknutí

$$w = 0 \quad (3a)$$

$$w_y = 0 \quad (3b)$$

3. volný okraj

$$w_{yy} + \mu w_{xx} = 0 \quad (4a)$$

$$w_{yyy} + (2 - \mu) w_{xxy} = 0 \quad (4b)$$

Pro řešení šikmých desek je možno užít rozličných druhů sítí; na první pohled se nám nabízí síť kosoúhlá. Je možno též výhodně užít sítí obdélníkových nebo i sítí čtvercové, avšak pro naše řešení užijeme síť rovnostranných trojúhelníků. K tomu účelu musíme si napřed sestavit diferenční operátory nahrazující s určitou přesností operátory diferenciální, které tvoří diferenciální rovnici úlohy a okrajové podmínky.

**Trojúhelníková síť**

Napřed diferenčně vyjádříme operátor  $\nabla^2$ . Píšeme-li pro bod  $k$  se souřadnicemi  $(x_k, y_k)$  Taylorův rozvoj funkce  $w$  k počátku souřadnic, dostaneme

$$w_k = w_0 + x_k w_x + y_k w_y + \frac{1}{2} (x_k^2 w_{xx} + 2x_k y_k w_{xy} + y_k^2 w_{yy}) + \frac{1}{6} (x_k^3 w_{xxx} + 3x_k^2 y_k w_{xxy} + 3x_k y_k^2 w_{xyy} + y_k^3 w_{yyy}) + \frac{1}{24} (x_k^4 w_{xxxx} + 4x_k^3 y_k w_{xxx} + 6x_k^2 y_k^2 w_{xxy} + 4x_k y_k^3 w_{xyy} + y_k^4 w_{yyy}) + \dots \quad (5)$$

kde  $w_x, w_{xx}, w_{xyy}$  ap. značí hodnoty derivací v počátku.

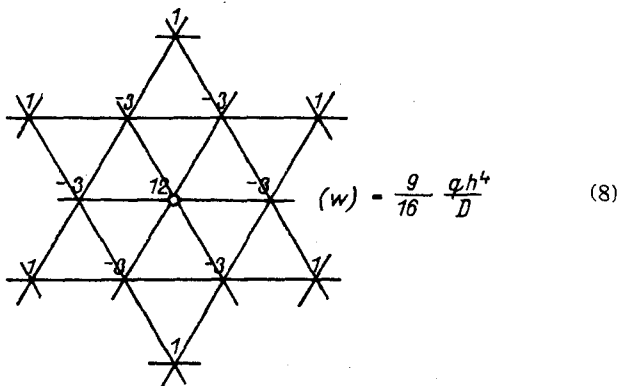
Uvažujme hvězdicí bodů sítě s osami souřadnic, označenými podle obr. 1. Stranu sítě označme  $h$ . Dosadíme-li do rovnice (5) pro body 1, 2, ... 6,  $a, b, \dots f$  souřadnice

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (h, 0), & 2 &\equiv \left(\frac{h}{2}, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right), & 3 &\equiv \left(-\frac{h}{2}, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right), \\ 4 &\equiv (-h, 0), & 5 &\equiv \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right), & 6 &\equiv \left(\frac{h}{2}, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right), \\ a &\equiv \left(\frac{3}{2}h, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right), & b &\equiv (0, h\sqrt{3}), & c &\equiv \left(-\frac{3}{2}h, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right), \\ d &\equiv \left(-\frac{3}{2}h, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right), & e &\equiv (0, -h\sqrt{3}), \\ f &\equiv \left(\frac{3}{2}h, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

dostaneme tak postupně Taylorovy rozvoje pro funkční hodnoty  $w_1, w_2, \dots w_6, w_a, w_b, \dots w_f$ . Z těchto hodnot si vyjádříme výraz

$$12w_0 - 3(w_1 + w_2 + \dots + w_6) + w_a + w_b + \dots + w_f = \frac{9}{16} h^4 \nabla^4 w + \dots \quad (7)$$

v němž zbytek je šestého řádu [3]. Dosadíme-li do této rovnice, jež určuje operátor  $\nabla^4$ , za  $\nabla^4 w$  podle rovnice (1), dostaneme diferenční rovnici rovnováhy pro určitý bod, kterou symbolicky zapíšeme ve tvaru hvězdice



Při zatížení osamělým břemenem  $P$  v uzlu sítě nahradíme s určitou přibližností působení břemene  $P$  rovnoměrným zatížením  $q$  po ploše šestiúhelníka  $mnopqr$ , které se svou výslednicí rovná  $P$  (obr. 5). Tento šestiúhelník má střed v uzlu sítě, stranu rovnou  $h/2$ , jeho vrcholy jsou středy trojúhelníků sítě a jeho plocha je tudíž  $F = \frac{3\sqrt{3}}{2} h^2$ . Můžeme tedy psát

$$q = \frac{P}{F} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{P}{h^2} \quad (8)$$

Po dosazení rovnice (8) vyjde nám pravá strana, neboli zatěžovací člen, ve tvaru

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{Ph^2}{D} \quad (8')$$

Dále určíme diferenční výraz pro podmínku (4a) volného okraje, je-li volný okraj totožný s osou  $x$  a deska je položena pod ní (obr. 1). Z rovnice (5) dosazením podle (6) můžeme vytvořit výrazy

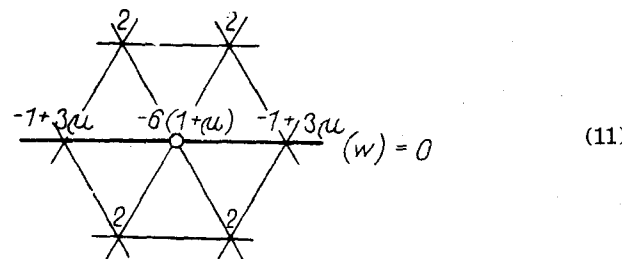
$$w_2 + w_3 + w_5 + w_6 = 4w_0 + 2 \left( \frac{h^2}{4} w_{xx} + \frac{3h^2}{4} w_{yy} \right) + \dots \quad (9)$$

$$w_1 + w_4 = 2w_0 + h^2 w_{xx} + \dots \quad (10)$$

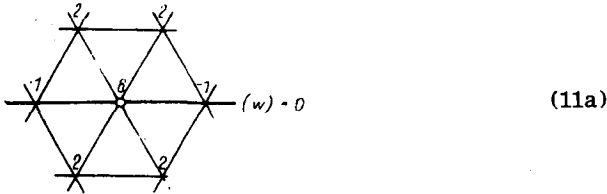
Násobíme-li rovnici (9) dvěma a rovnicí (10) činitelem  $(3\mu - 1)$  a obě sečteme, dostaneme po úpravě okrajovou podmínku (4a) ve tvaru

$$3h^2 (w_{yy} + \mu w_{xx}) = 2(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) + (3\mu - 1)(w_1 + w_4) - 6(1 + \mu)w_0 = 0$$

čili upravíme-li ji ve formě hvězdice



Uvažujeme-li desku betonovou nebo železobetonovou, můžeme v okrajových podmínkách přibližně položit  $\mu = 0$ , neboť  $\mu$  nemá v okrajových podmínkách příliš velký vliv a stejně je dosti malé ( $\mu = 0,08 \div 0,25$ ). Potom se rovnice (11) zjednoduší na



Dále sestavíme výraz pro podmínku (4b). K tomu cíl z rovnice (5) dosazením podle (6) určíme výrazy

$$w_2 + w_3 - w_5 - w_6 = 2\sqrt{3}hw_y + \frac{\sqrt{3}}{4}h^3(w_{xxy} + w_{yyy}) + \dots \quad (12)$$

$$w_a + w_c - w_d - w_f = 2\sqrt{3}hw_y + \frac{\sqrt{3}}{4}h^3(9w_{xxy} + w_{yyy}) + \dots \quad (13)$$

$$w_b - w_e = 2\sqrt{3}hw_y + \sqrt{3}h^3w_{yyy} + \dots \quad (14)$$

jejichž chyba je nejvýše čtvrtého řádu. Vypočteme-li z rovnice (14)  $w_y$  a dosadíme do rovnic (12) a (13) dostaneme pro  $w_{xxy}$  a  $w_{yyy}$  soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

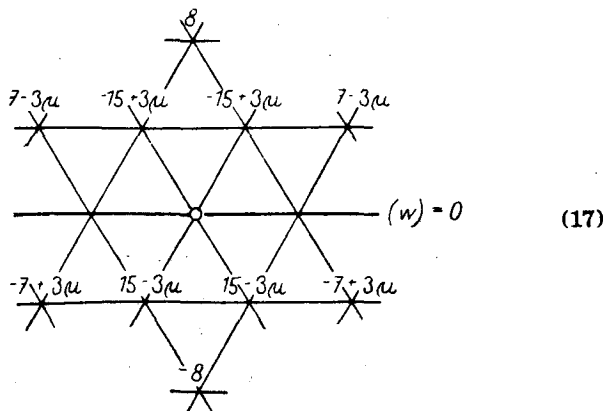
$$w_2 + w_3 - w_5 - w_6 - w_b + w_e = \frac{\sqrt{3}}{4}h^3(w_{xxy} - 3w_{yyy}) \quad (15)$$

$$w_a + w_c - w_d - w_f - w_b + w_e = \frac{\sqrt{3}}{4}h^3(9w_{xxy} - 3w_{yyy}) \quad (16)$$

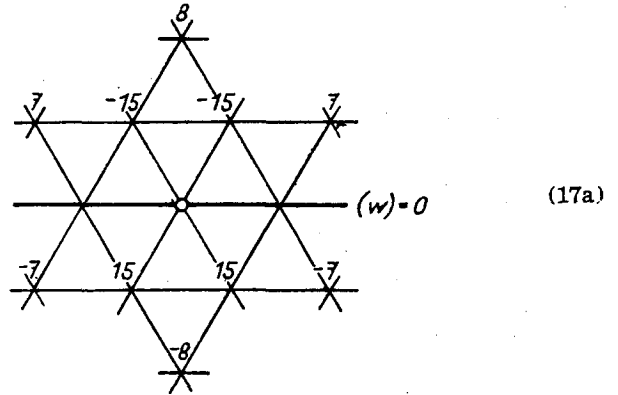
Znásobíme-li rovnici (15) činitelem  $(-15 + 3\mu)$  a rovnici (16) činitelem  $(7 - 3\mu)$  a obě sečteme, dostaneme po úpravě okrajovou podmínku (4b) ve tvaru

$$\frac{\sqrt{3}}{4}h^3 \cdot 24 [w_{yyy} + (2 - \mu)w_{xxy}] = - (15 - 3\mu)(w_2 + w_3 - w_5 - w_6) + 8(w_b - w_e) + (7 - 3\mu)(w_a + w_c - w_d - w_f) = 0$$

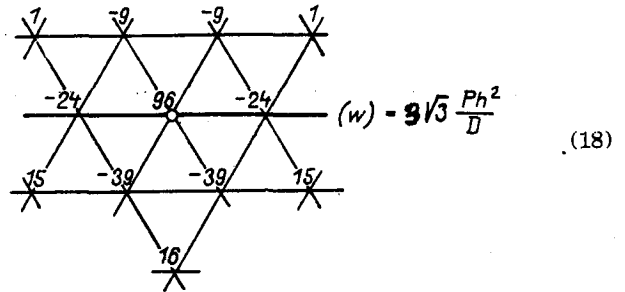
čili



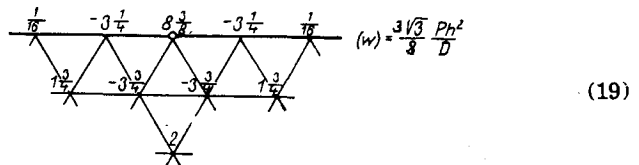
Pro desku betonovou nebo železobetonovou zde můžeme opět položit  $\mu = 0$  a bude



Kdybychom nyní napsali systém diferenčních rovnic pro všechny uzly sítě, vyskytly by se nám v nich jako neznámé jakési fiktivní hodnoty funkce  $w$  v bodech sítě vně desky, a to u volného okraje ve dvou řadách rovnoběžných s okrajem (obr. 5). Tyto hodnoty jsou pak vázány okrajovými podmínkami, které bychom museli připojit k systému diferenčních rovnic, jejichž počet by se tím zvětšil. Tomu se lze předem vyhnout, podaří-li se nám sloučit obě okrajové podmínky (11) a (17), resp. (11a) a (17a) s rovnicí (8) tak, aby nám vypadly hodnoty  $w$  v uzlech sítě vně desky. Dostaneme tak výsledný operátor pro bod volného okraje. Při  $\mu = 0$  lze to provést takto: Odečteme-li rovnici (17a) od rovnice (8) násobené 8, bude



Přičteme-li zde třikrát rovnici (11a) psanou pro body 4, 0, 1 (obr. 1) a násobenou postupně  $(-\frac{1}{2})$ , pěti a  $(-\frac{1}{2})$ , dostaneme konečně po vydělení osmi



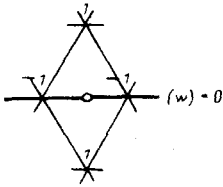
Píšeme-li rovnici (8') pro uzel v první řadě od volného okraje (obr. 5), vyskytne se nám v ní jako neznámá též hodnota  $w$  v jednom uzlu vně desky, a to v bodě  $b$  při označení podle obr. 1, která má koeficient 1. Protože je tento koeficient malý, můžeme jej převést do uzlů uvnitř desky pomocí okrajové podmínky (4a), kterou zjednodušíme jak je dále uvedeno. Leží-li body 2, 3 (obr. 1) na volném okraji a označíme-li střed úsečky 23 jako  $s$ , můžeme podmínku (4a) pro bod  $s$  při  $\mu = 0$  psát ve tvaru

$$h^2w_{yy} = w_b - 2w_s + w_0 = 0 \quad (20)$$

Předpokládáme-li lineární průběh funkce  $w$  mezi body 2, 3, je  $2w_s = w_2 + w_3$ , a tedy po dosazení do (20)

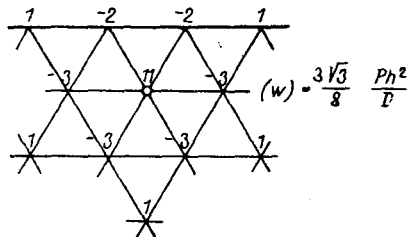
$$w_b - w_2 - w_3 + w_0 = 0$$

čili



$$(21)$$

Odečteme-li pak tuto rovnici, psanou pro střed úsečky 23, v operátoru (8), dostaneme pro uzly v první řadě od volného okraje výslednou rovnici rovnováhy



$$(22)$$

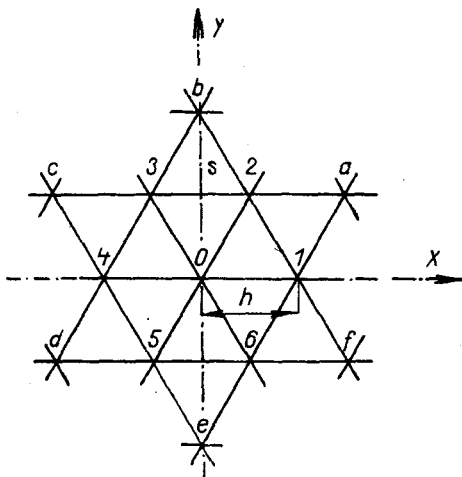
U kloubového okraje zavedeme nyní okrajové podmínky (2a, b). Ztotožňuje-li se kloubový okraj s vláknem sítě, jako např. u desky a sítě na obr. 4 a 5, můžeme podmínku (2b) psanou pro bod  $s$  (obr. 2) diferencně vyjádřit

$$h^2 w_{yy} = w_1 - 2w_s + w_2 = 0$$

Protože podle (2a) je  $w_s = 0$ , máme

$$w_1 = -w_2 \quad (23)$$

Při obecném úhlu  $\alpha$  ( $\alpha \neq 60^\circ$ ) je použití trojúhelníkové sítě poněkud obtížnější. Volný okraj vložíme



Obr. 1

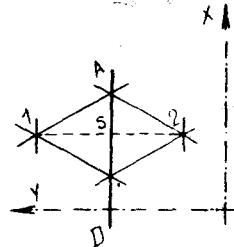
vždy do vláken sítě, kloubový okraj pak ale obecně neprochází uzly sítě. Předpokládáme přímkový průběh funkce  $w$  mezi body 2 a 3 (obr. 3). Proložme dále bodem 1 kolmicí  $1ba$  k okraji desky. Pak

$$w_a = w_2 \cdot \frac{a3}{23} + w_3 \cdot \frac{a2}{23}$$

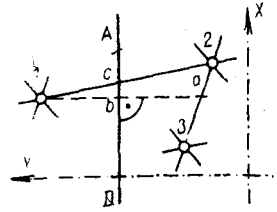
Předpokládáme-li dále přímkový průběh funkce  $w$  mezi body 1,  $a$ , bude tím splněna podmínka  $w_{yy} = 0$  (v bodě  $b$ ). Potom je

$$w_1 = -\frac{1b}{ab} w_a \quad (24)$$

Neodchyluje-li se však spojnice některých dvou bodů sítě (nemusí to být vlákno sítě), jako např. 1 a 2,



Obr. 2



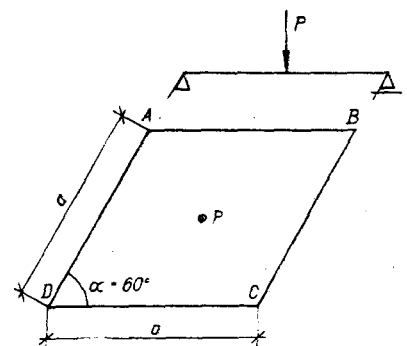
Obr. 3

příliš od kolmice k okraji, můžeme s určitou přibližností předpokládat přímkový průběh funkce  $w$  po této spojnici. Pak bude

$$w_1 = -\frac{1c}{2c} w_2 \quad (25)$$

### Řešení sítě relaxační metodou

Jako praktický příklad uvažujeme šikmou desku  $ABCD$ , kosočtvercovou se stranou  $a$  a s úhlem  $\alpha = 60^\circ$  která je uložena na okrajích  $AD, BC$  kloubově, na  $AB, CD$  volně a je zatížena uprostřed jedním osamělým břemenem  $P$  (obr. 4). Zvolíme trojúhelníkovou síť se stranou  $h = a/4$  (obr. 5). Deska, síť i zatížení jsou symetrické podle středu desky a stačí tedy řešit jen polovinu desky, t.j. 8 bodů. Body očíslováme symetricky podle středu desky a tím už předurčíme, že všechny prováděné operace budou též symetrické. Napišeme-li pro body 1, 2, ... 8 příslušné diferencní rovnice, dostaneme systém 8 lineárních rovnic o 8 neznámých  $w_1, w_2, \dots, w_8$  (tab. I - svislé sloupce). Absolutní členy těchto rovnic představují zatěžovací členy  $Z$ .



Obr. 4

Každá z těchto rovnic má tedy obecný tvar

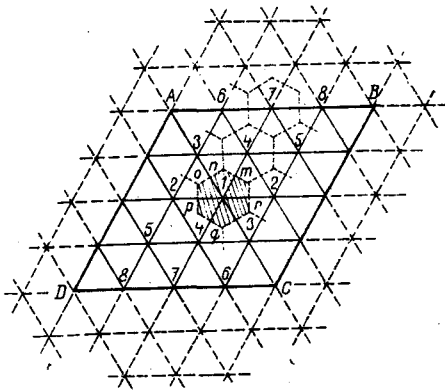
$$\sum_i a_{ik} \cdot w_i = Z_k \quad (26)$$

kde  $a_{ik}$  jsou koeficienty u neznámých  $w_i$ , a můžeme na ni hledět jako na podmínku rovnováhy pro příslušný bod  $k$ . Nesplňují-li neznámé  $w_1, w_2, \dots, w_8$  přesně tyto rovnice, musíme v každé rov-

nici k zatěžovacímu členu  $Z_k$  připojit ještě nějaký další člen  $R_k$ , aby nastala rovnost a bude tedy

$$\sum_i a_{ik} \cdot w_i = Z_k + R_k \quad (27)$$

Tento člen  $R_k$ , který nazveme residuum, má též charakter jakéhosi myšleného zatěžovacího členu vyvozeného nějakými myšlenými dalšími silami, které



Obr. 5

uvádí daný bod při daných průhybech do rovnováhy. Přenos těchto sil si můžeme představit jako reakce nějakých myšlených podpor, jimiž bychom mohli podepřít desku v každém bodě sítě. Při relaxaci budeme postupovat tak, že zvolíme určité průhyby  $w_1, w_2, \dots, w_8$  v bodech sítě a z nich pomocí diferenčních rovnic vyčíslíme residua  $R_k$  ve všech bodech sítě. Potom budeme provádět postupné změny průhybů, čili „uvolňovat“ jednotlivé body (přesněji: uvolňovat myšlené podpory v těchto bodech) tak, abychom postupně zmenšovali residua až k nulové hodnotě. V tom případě vnější podpory v bodech sítě budou přenášet nulové síly a odpovídající průhybový stav bude řešením naší úlohy. Prakticky ovšem stačí přivést residua k dostatečně malým hodnotám.

Tato metoda řešení sítě se nazývá relaxační [7] a [2]. Pro výpočet je prakticky výhodné sestavit relaxační tabulku (tab. I). Do svislých sloupců zapíšeme diferenční rovnice pro příslušné body. Operátor,

který určuje hodnotu residua v určitém bodě pomocí hodnot  $w_i$ , nazývá se residuální a operátor, který určuje vliv změny průhybu v určitém bodě na hodnoty residuí v tomto bodě a bodech okolních, nazývá se relaxační. V relaxační tabulce nám residuální operátory tvoří sloupce, relaxační operátory řádky. Relaxaci můžeme provádět též skupinově nebo blokově, čímž se výpočet značně zkrátí, hlavně u větších sítí.

Připomeňme dále, že průhyby desky jsou přímo úměrné zatížení. Při relaxaci se proto předem volí určitá numerická hodnota  $Z'$  zatěžovacího členu, bez rozměru, třeba  $Z' = 1000$ . Vyřešíme-li numerické hodnoty  $w_i'$  průhybů pro toto zatížení, bude hodnota průhybu  $w_i$  při zatížení daným zatěžovacím členem  $Z$  rovna

$$w_i = w_i' \frac{Z}{Z'} \quad (28)$$

Při trojúhelníkové síti je podle (8')  $Z = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{Ph^2}{D}$ ,

$$\text{popřípadě } Z = \frac{9}{16} \frac{qh^4}{D}.$$

**Relaxace s proměnným zatěžovacím členem**

Ukážeme způsob, jak lze při zatížení libovolné desky jedním osamělým břemenem relaxační proces velmi značně urychlit. Označíme-li v rovnici (27)  $Z_k + R_k = \bar{Z}_k$ , budou mít diferenční rovnice tvar

$$\sum_i a_{ik} \cdot w_i = \bar{Z}_k \quad (29)$$

Analogií s rovnicí (26) vidíme, že  $\bar{Z}_k$  představuje zatěžovací člen, pro který je deska právě v rovnováze.

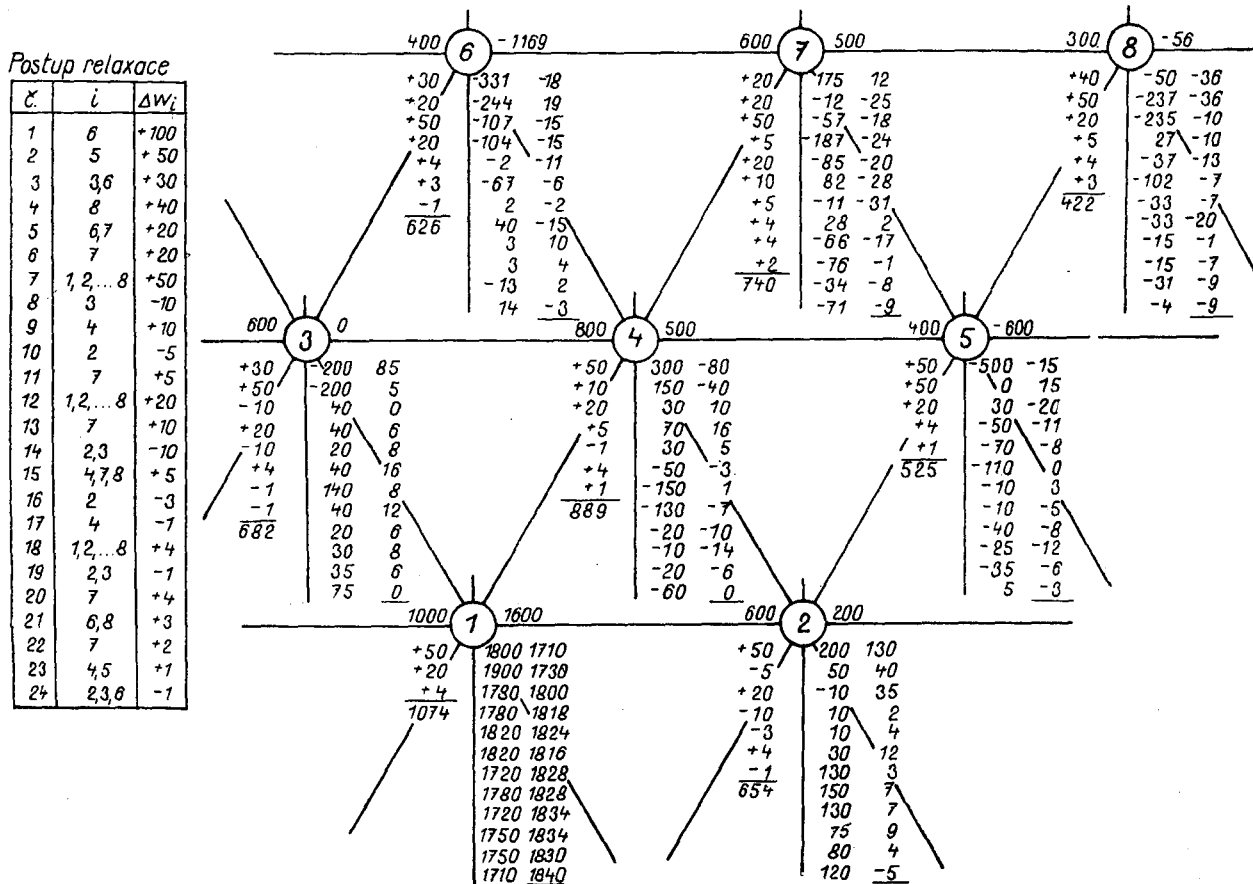
Můžeme tedy při relaxaci postupovat následovně. Zvolíme opět určité výchozí hodnoty  $w_i$ . Z diferenční rovnice pro bod  $k$ , v němž působí osamělé břemeno  $P$ , určíme pak zatěžovací člen  $Z$  v bodě  $k$ , potřebný k dosažení rovnováhy. Tím, že jsme si zatěžovací člen takto určili, je tento bod v rovnováze, aniž bychom zaváděli nějakou myšlenou podporu v tomto bodě. V průběhu relaxace budeme pak uvolňovat pouze ostatní body, tj. pouze v těchto bodech budeme odstraňovat residua. Člen  $Z$  v bodě břemene  $P$ , na který

Tabulka I (relaxační)

$\Delta R_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta w_i$								
1	12	-3	-3	-3	1	2	0	0
2	-6	11	-2	-2	-3	0	2	0
3	-6	-2	10	-2	0	$-3^{13}/16$	$1^3/4$	0
4	-6	-2	-2	11	-3	$-3^3/4$	$-3^3/4$	$1^3/4$
5	2	-3	0	-3	10	$1^3/4$	$-3^3/4$	$-3^3/4$
6	2	0	-2	-2	1	$8^3/3$	$-3^3/4$	$1^3/16$
7	0	1	1	-2	-2	$-3^3/4$	$8^3/8$	$-3^3/4$
8	0	0	0	1	-2	$1^3/16$	$-3^3/4$	$6^3/16$
$\Sigma$	-2	2	2	-2	2	$1^3/8$	$-1^7/8$	$1^3/8$

budeme formálně hledět jako na residuum, i když fakticky význam residua nemá, bude se nám přitom měnit, a to stejně, jako se měnilo residuum v tomto bodě. Přitom při volbě relaxačních kroků se nemusíme na změny členu  $Z$  vůbec ohlížet. Okamžitý stav průhybu a zatížení bude na každém stupni relaxa-

v prvním sloupci, 13. až 24. ve sloupci druhém. Na prvním místě do levého sloupce zapíšeme výchozí hodnoty, které vhodně odhadneme. Při řešení bylo použito relaxační metody s proměnným zatěžovacím členem, která výpočet značně zrychlila. Proměnný zatěžovací člen  $Z$  v bodě 1, v němž je břemeno  $P$ ,



Obr. 6

ního procesu zachycovat rovnováhu desky při určitém, po každém relaxačním kroku však jiném zatěžovacím členu. Jako výsledek dostaneme určitý výsledný zatěžovací člen  $Z_v$ , odpovídající výslednému stavu průhybu desky. Průhyby  $w_i$  vypočteme, dosadíme-li do rovnice (28)  $Z' = Z_v$ .

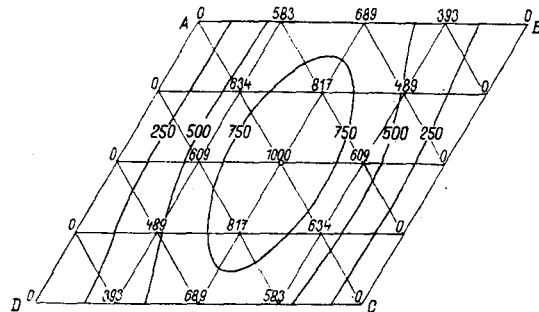
Výhoda této metody, kterou bychom mohli nazvat relaxací s proměnným zatěžovacím členem, je v tom, že z celkového počtu bodů relaxujeme vlastně o jeden bod, v němž je osamělé břemeno, méně. Změny průhybů v tomto bodě můžeme provádět libovolně, jen abychom vhodně ovlivnili residua sousedních bodů, při čemž nám na změně residua (přesněji: členu  $Z$ ), která se přivodí v samotném tomto bodě, vůbec nezáleží. Matematicky je to stejné, jakoby se nám počet diferenciálních rovnic zmenšil o jednu. Těto metody lze užít pro každou desku zatíženou osamělým břemenem a při každé síti.

**Řešení početního příkladu**

Relaxační výpočet dříve uvedeného praktického příkladu je proveden na obr. 6, tab. I je příslušná relaxační tabulka. Na obr. 6 do sloupců vlevo od příslušného bodu zapisujeme změny průhybů, vpravo okamžitý stav residuí, kde 1. až 12. krok zapisujeme

je zapsán formálně stejně jako residuum v pravém sloupci u bodu 1.

Jako výsledek byla získána v bodě 1 hodnota průhybu  $w_1' = 1074$ , odpovídající výsledné hodnotě  $Z_v$  zatěžovacího členu  $Z, Z_v = Z' = 1840$ . Dále je  $h = a/4$ .

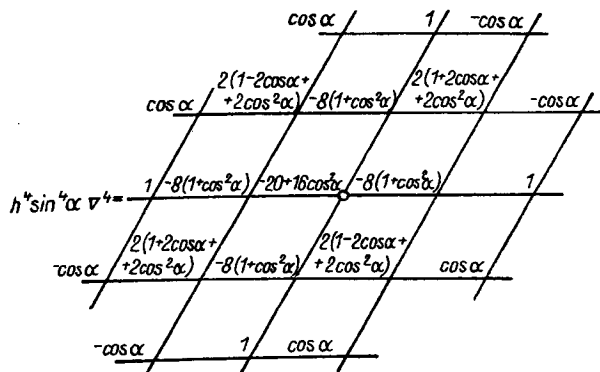


Obr. 7

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (28), dostaneme pro průhyb  $w_1$  ve středu desky výraz

$$w_1 = 0,0237 \frac{Pa^2}{D} \quad (30)$$

Deformační stav desky, přepočtený podle úměrnosti pro hodnotu průhybu ve středu desky rovnou 1000, je na obr. 7. Vyjádřit z průhybového stavu desky normální a tangenciální napětí v určitém bodě je již snadné. Platí totiž vzorce



Obr. 8

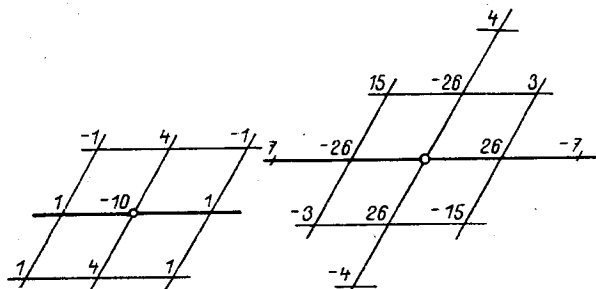
$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} (w_{xx} + \mu w_{yy}) \quad (31)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} (w_{yy} + \mu w_{xx}) \quad (32)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1-\mu} w_{xy} \quad (33)$$

do nichž dosadíme za  $w_{xx}$ ,  $w_{yy}$ ,  $w_{xy}$  hodnoty přibližných derivací (obr. 1)

$$w_{xx} = \frac{1}{h^2} (w_1 - 2w_0 + w_4) \quad (34)$$



Obr. 10

Obr. 11

$$w_{yy} = \frac{1}{3h^2} (-w_1 + 2w_2 + 2w_3 - w_4 + 2w_5 + 2w_6 - 6w_0) \quad (35)$$

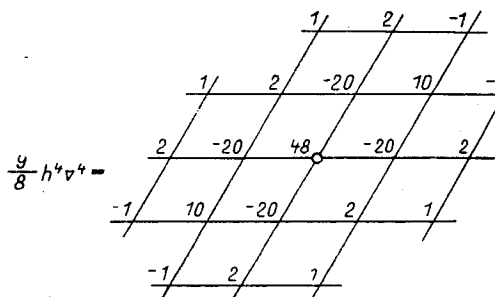
$$w_{xy} = \frac{1}{h^2\sqrt{3}} (w_2 - w_3 + w_5 - w_6) \quad (36)$$

v bodě 0. Poslední vztah dostaneme, vyjádříme-li z rovnice (5) dosazením podle (6) výraz  $w_2 - w_3 + w_5 - w_6$

+  $w_5 - w_6$ ; vztahy (34), (35) plynou z rovnic (10), (11a).

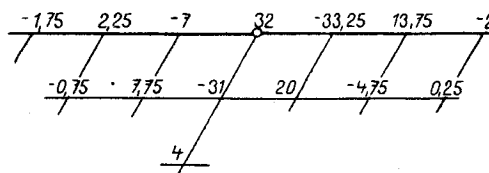
### Relaxační řešení kosoúhloú sítí a jeho nevýhody

Pro řešení šikmých desek se často užívá sítě kosoúhlé (např. [4]). Předchozí příklad jsem řešil relaxačně též pomocí kosoúhlé sítě, jejíž uzly byly totožné s naší sítí trojúhelníkovou. Výpočet byl však velmi obtížný a vyplynulo z něho, že kosoúhlá síť je pro relaxaci námi uvažovaných desek méně vhodná. Pro relaxaci jsou totiž vhodné symetrické sítě, které dávají symetrické operátory. Vyjádříme-li si ale v kosoúhlé síti diferenční výraz pro operátor  $\nabla^2$ , zjistíme, že je jednak osově nesymetrický a při obecném úhlu  $\alpha$  nemá celistvé ani racionální koeficienty (viz obr. 8 a pro  $\alpha = 60^\circ$  obr. 9). Operátory okrajových podmínek volného okraje vyjdou ještě nepříznivěji (pro  $\alpha = 60^\circ$  a  $\mu = 0$  viz obr. 10, 11). Zjednodušíme-li prvou podmínku lineárním nahrazením průběhu funkce  $w$  u okraje, dostaneme výsledný okrajový operá-



Obr. 9

tor, který vyjde ve tvaru na obr. 12. Operátory na obr. 9 nebo 12 nám zároveň představují residuální operátory a vidíme, že při uvolňování bodu se nám rozvádí residua do sousedních bodů příliš velkými hodnotami, u druhého operátoru dokonce většími hodnotami, než jsou původní hodnoty residuí. Relaxační proces proto konverguje velmi pomalu, snížení maximálního residua dostáváme periodicky teprve až po několika relaxačních krocích a změny residuí je



Obr. 12

proto třeba odhadovat na několik takových kroků kupředu. Operátory pro kosoúhloú síť mají též větší chybu než u sítě symetrické a tato chyba roste, čím více se  $\alpha$  liší od  $90^\circ$ .

### LITERATURA

[1] Bechyně St.: Betonové mosty trámové a rámové, Praha 1954, SNTL.  
 [2] Brilla J.: Úvod do relaxační metody, Práce ústavu stavebnictva a architektury SAV za rok 1954, Bratislava 1956, VSAV.  
 [3] Collatz L.: Numerische Behandlung von Differenzialgleichungen, Berlin 1951, Springer.  
 [4] Favre H.: Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences, Mémoires de l'A. I. P. C. 1943/44, Zurich.

- [5] Kovařík V.: Přibližné metody v rovinné pružnosti (skripty), Praha 1957, SNTL.  
 [6] Servít R.: Nauka o pružnosti a pevnosti, II. díl (skripty), Praha 1955, SNTL.

- [7] Southwell R. V.: Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford 1946.  
 [8] Varvak P. M.: Razvitije i prilozhenije metoda sietok k razčetu plastinok, Kyjev 1952.

З. П. БАЖАНТ: РЕШЕНИЕ КОСЫХ ПЛИТ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИЙ.

Составление дифференциальных операторов и операторов краевых условий для свободного и шарнирного края при треугольной сетке. Решение сетки методом релаксаций. Релаксации с переменным грузовым членом. Числовой пример.

Z. P. BAŽANT: RELAXATIONS-METHODE DER LÖSUNG SCHIEFER PLATTEN MIT FREIEN RÄNDERN

Zusammenstellung der Differentialoperatoren und Operatoren der Randbedingungen für freien Rand und Gelenkrand bei angenommenem Dreiecknetz. Lösung des Netzes mittels Relaxationsmethode. Relaxation mit veränderlichem Belastungsglied. Zahlenbeispiel.

Z. P. BAŽANT: RELAXATION SOLUTION OF INCLINED SLABS WITH FREE BORDERS.

The setting up of differential operators and of operators of border conditions for a free and a hinge border when the net is triangular. Net solution by relaxation method. Relaxation with a variable load function. Mathematical example.

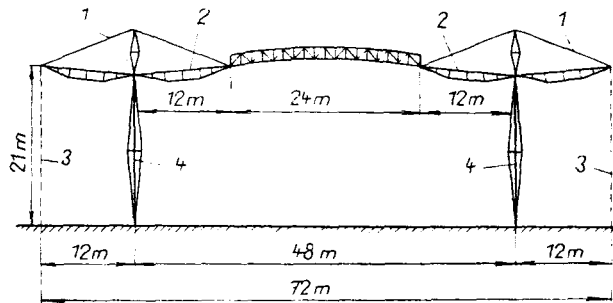
## REFERÁTY Z CIZÍCH ČASOPISŮ

### KONSTRUKCE NĚKTERÝCH VÝZNAČNÝCH PAVILONŮ NA SVĚTOVÉ VÝSTAVĚ V BRUSELI

#### Sovětský pavilón

(Podle časopisu »Aluminium« č. 4/1958)

Sovětský pavilón zaujímá půdorys 72 m široký a 150 m dlouhý. Jeho průměrná výška je 21 m. Střechu nesou dvě řady ocelových sloupů z materiálu vysoké pevnosti, jež jsou od sebe vzdáleny 48,0 m (obr. 1). Na těchto sloupech jsou nad střechou nástavce, na nichž jsou oboustranně na lanech zavěšeny mírně stou-



Obr. 1. Sovětský pavilón. Schéma nosné konstrukce v příčném řezu

1 — napínací lana; 2 — hliníkový vazník; 3 — prosklená stěna z profilů z hliníkových slitin; 4 — ocelová podpěra

pající krakorce lichoběžníkového obrysu, vyrobené z profilů z hliníkových slitin. Vyložení těchto krakorců je 12,0 m. Na vnějších krakorcích je zavěšena prosklená stěna rovněž z profilů z hliníkových slitin. Vnitřními krakorci jsou podepřeny nosníky středního světélku rozpětí 24,0 m, jež jsou příhradové s trojúhelníkovým průřezem (spodní pásy dva) rovněž z profilů z hliníkových slitin. Konstrukce je navržena tak, aby zavěšená obvodová stěna vyvážila váhu světélku.

Na oba pásy krakorců se použilo protlačovaných profilů tvarů T, zatím co svislice a vzpěry jsou provedeny z úhelníků. Horní pásy zakřivených vazníků světélku (obr. 2) se skládají ze dvou úhelníků se šikmými přírubami, na které jsou přinýtovány styč-

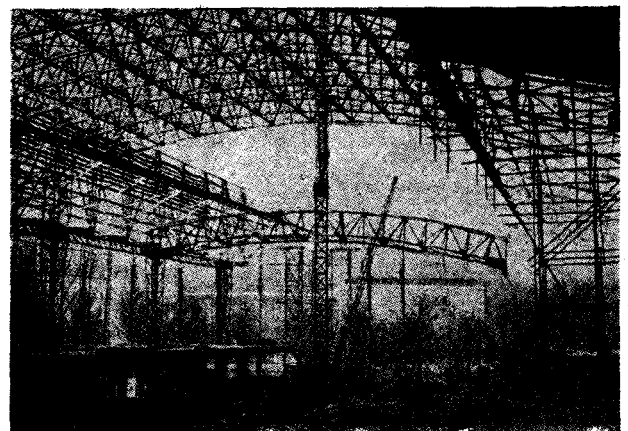
nikové plechy pro příčky. Šikmé příčky jsou provedeny z T profilů, svislice z jednoduchých úhelníků. Oba spodní pásy těchto trojúhelníkových vazníků se skládají ze speciálních úhelníků svírajících úhel 120°.

Kolmo k vazníkům probíhají vaznice v osové vzdálenosti 2,0 m zhotovené rovněž z protlačovaných profilů z hliníkových slitin. Jako krytiny se použilo vlnitého hliníkového plechu.

Pro profily bylo použito slitin AlMgSi a pro styčnickové plechy AlMg<sub>4</sub>.

Obvodové stěny jsou v celé své ploše zaskleny v eloxovaných profilech z hliníkových slitin (obr. 3). Se zřetelem k lepšímu přenášení účinku větru a estetickému vzhledu je konstrukce stěn provedena tak, že má půdorys pravidelně lomený.

Celkem se při stavbě sovětského pavilónu spotřebovalo 360 t hliníkových slitin, čímž se SSSR zařadil na prvé místo pokud jde o spotřebu hliníku na této výstavě (Belgický pavilón dopravy 220 t, Velký výstavní palác 100 t, Atomium 75 t atd. Celkem se na



Obr. 2. Sovětský pavilón. Pohled do pavilónu při montáži. Zakřivené vazníky světélku se právě zdvíhá