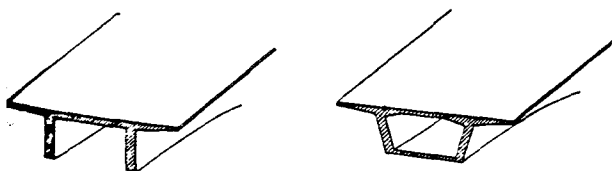


Tenkostěnné pruty tuhého proměnného průřezu

V článku se uvádí řešení založené na předpokladu, že příčný řez je tuhý a že rozdělení podélných protažení a normálních napětí po průřezu je stejné jako pro prut stálého průřezu, pro který se přitom uvažuje, že deplanace je podobná jako při prostém kroucení. Základní rovnice jsou odvozeny pro monosymetrické průřezy variační metodou. Na rozdíl od prutů stálého průřezu nelze zvolit osu smykových středů za osu prutu, a proto kroucení a vodorovný ohyb jsou navzájem závislé, příslušné diferenciální rovnice jsou simultánní. Řešení je provedeno pro pruty otevřeného i uzavřeného průřezu a dále i pro pruty se zakřivenou osou, obecně proměnného průřezu i proměnné tloušťky stěn. Je též uvedeno řešení staticky neurčitých konstrukcí. Tato teorie má význam pro výpočet mostů, zvláště horizontálně zakřivených, u nichž vznikají velké kroutící momenty.

U mostů trámových mostů otevřeného nebo uzavřeného průřezu lze ze statického hlediska považovat za tenkostěnné pruty. Pro takové pruty nelze, jak známo, vystačit s prostým kroucením a je nutno uvažovat jednak deplanaci způsobenou kroucením, a případně, když nemá dostatečný počet příčných výztuh, deformaci příčného řezu. V této práci budeme uvažovat pouze nosníky dostatečně vyztužené proti deformaci příčného řezu. Teorie těchto prutů byla již vyřešena (v konečné formě r. 1939 Vlasovem) [12], avšak pouze pro konstantní průřez. Pro proměnný průřez byly dosud řešeny jen některé speciální případy, jako např. pruty kónicky sbíhavé (letecká křídla) [1], [6], [9], [11], jež však pro mosty nemají význam. Mimoto Cywiński [2] podal řešení prutů otevřeného průřezu, jež si lze představit jakožto pruty vyřiznuté z válcové plochy, které mají konstantní tloušťku stěn a jsou zatíženy jen kroutícími momenty, přičemž jejich řešení i experimentálně (řešení je v soulase s obecnou teorií podanou v této práci). V této práci uvedeme řešení pro otevřený i uzavřený, monosymetrický, obecně proměnný průřez (obr. 1), při proměnné tloušťce stěn, pro obecné zatížení a pro obecně zakřivenou osu. Tyto výsledky byly již autorem uveřejněny r. 1965 [2], [5].



Obr. 1

■ Předpoklady řešení

Vedle obvyklých předpokladů o dostatečně dlouhém prutu a malé tloušťce stěn vzhledem k rozměrům průřezu (více než asi 10 : 1 resp. 1 : 10), lineární pružnosti materiálu a malých deformacích zavedeme tyto přetvárné hypotézy:

a) Příčný řez je absolutně tuhý, což je možno dokonale splnit jen při značně hustých příčných výztuhách (stěnách); nosníky mostů z předpjatého betonu splňují tento předpoklad jen částečně.

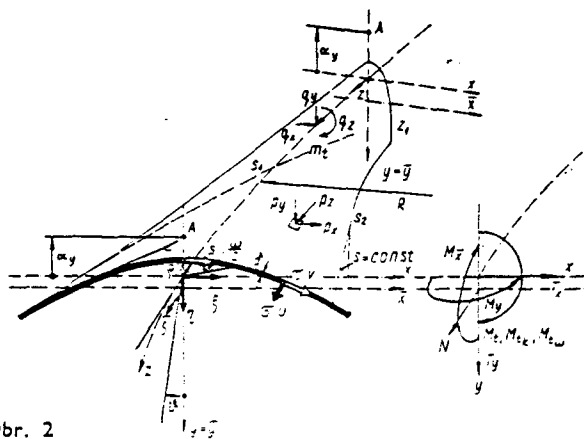
b) Podélné protažení na normální napětí u prutů proměnného průřezu se rozděluje po průřezu stejně jako při průřezu konstantním, přičemž

c) pro pruty konstantního průřezu předpokládáme, že deplanace průřezů má stejný tvar jako při prostém kroucení (Umanského předpoklad). Speciálně pro ohyb přitom platí hypotéza o zachování kolmých rovinných průřezů.

d) Proměna průřezu je pomalá a spojitá.

Předpoklad b) je nový a jak dále uvidíme, je nutný k tomu, aby řešení bylo v soulase s technickou teorií

ohybu tenkostěnných prutů proměnného průřezu. Předpoklady a) a c) jsou převzaty z klasické teorie a jsou experimentálně prověřeny.



Obr. 2

Označení veličin je patrné z obr. 2, kde z je délka osy prutu, x, y jsou lokální pravotočivé souřadnice v průřezu, s je délka střednice stěny v průřezu, ξ, η, δ jsou posunutí průřezu (průhyby) a pootočení kolem osy prutu, u, v jsou posunutí bodů střednice průřezu ve směru osy prutu resp. tečny střednice stěny v průřezu.

Přibližné technické řešení můžeme pokládat za přímé řešení variační metodou. V tomto smyslu můžeme za základ řešení zvolit pro rozdělení podélných protažení ϵ v průřezu lineární výraz

$$\epsilon = \sum_{r=1}^n a_r \varphi_r(x, y) \quad (1)$$

kde $\varphi_r(x, y)$ jsou jisté lineárně nezávislé funkce, na jejichž vhodné volbě závisí přesnost a správnost řešení. Volba těchto funkcí je dána hypotézami a) až c).

Pro jednoduchost budeme uvažovat symetrii průřezu podle osy y , což je u mostů obvyklé.

■ Přímé pruty otevřeného proměnného průřezu

Pro úplnost odvodíme napřed tvar výrazu (1) pro konstantní průřez. Při prostém kroucení [viz hypotéza c)] se uvažuje, že podélné normální napětí σ je nulové (Saint-Venantův předpoklad). Z diferenciální rovnice rovnováhy stěny

$$\frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = 0$$

kde δ je tloušťka stěny,

pak integrací podél střednice s od volného okraje otevřeného průřezu, na němž $\tau = 0$, plyne

$$\tau \equiv 0$$

na střednicové ploše. Je tedy smyková deformace γ ve střednicové ploše nulová [12], což zavedl Wagner [9] pro otevřené průřezy jako výchozí předpoklad. Odtud pak máme:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Dosadíme-li sem podle předpokladu o tuhém příčném řezu

$$v = \xi \cos(x, s) + \eta \sin(x, s) + \vartheta \varrho \quad (2)$$

kde ϱ je vzdálenost tečny střednice od osy z , (x, s) — úhel mezi osou x a tečnou střednice s , obdržíme integrací této diferenciální rovnice [$ds \cos(x, s) = dx$, $ds \sin(x, s) = dy$]:

$$u = \xi - \xi' \bar{x} - \eta' \bar{y} - \vartheta' \omega \quad (2a)$$

kde \bar{x}, \bar{y} jsou souřadnice k hlavním těžišťovým osám setrvačnosti průřezu ($\bar{x} = x$),

ξ — posunutí podél osy z v těžišti průřezu,

ω — výsečová souřadnice bodu průřezu neboli deplanční funkce otevřeného průřezu $\omega = \omega(s)$, popisující rozdělení deplanace

$$\omega = \int_0^s \varrho ds \quad (3)$$

V bodě $s = 0$, tj. na ose symetrie y , je $\omega = 0$. Poněvadž ϱds značí dvojnásobnou plochu trojúhelníka se základnou ds a třetím vrcholem na ose z , představuje ω dvojnásobnou plochu výšeče tvořené střednicí průřezu od bodu $s = 0$ do bodu s vzhledem k pólu na ose z prutu. Mírou deplanace je poměrný úhel zkroucení ϑ' . Derivováním výrazu (2) podle z obdržíme pro hledaný tvar výrazu (1') $\varepsilon = u'$, čili

$$\varepsilon = \xi' - \xi'' \bar{x} - \eta'' \bar{y} - \vartheta'' \omega \quad (4)$$

Kdybychom nezavedli hypotézu b), museli bychom pro proměnný průřez ve výrazu (4) uvažovat dále členy $-\xi' \bar{x}' - \eta' \bar{y}' - \vartheta' \omega'$, kde $\bar{x}', \bar{y}', \omega'$ jsou derivace podle z podél křivek $s = \text{konstanta}$ na střednicové ploše. Ve smyslu rovnice (1) je to však zbytečná komplikace, jež by učinila řešení značně složitějším. Hlavním důvodem pro zanedbání členů \bar{x}', \bar{y}' přitom je, že bychom jinak nedostali souhlas s běžně užívanou technickou teorií ohybu tenkostěnných prutů proměnného průřezu, v níž se \bar{x}' a \bar{y}' neuvažuje.

Rovnice pro ϑ, ξ atd., odpovídající rozdělení protažení podle výrazu (4), lze nejjednodušeji odvodit variačně z principu minima potenciální energie, nahrazujícího podmínky rovnováhy. Tato energie se rovná součtu potenciální energie vnitřní deformace a potenciální energie vnějších sil, tj. zatížení. Specifická přetvárná energie vnitřních sil v průřezu je:

$$W = \int_F \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dF + \int_F \frac{1}{2} G \gamma^2 dF \quad (5)$$

kde E je modul pružnosti v tahu,

G — modul pružnosti ve smyku.

Protože γ ve střednicové ploše je nulové, vztahuje se druhý člen ve výrazu (5) pouze k nerovnoměrnému rozdě-

lení napětí po tloušťce stěny, jež je způsobeno prostým zkroucením podle Saint-Venanta. Jeho hodnota je

$$\frac{1}{2} G J_k \vartheta'^2$$

kde J_k je tuhost otevřeného průřezu v prostém zkroucení [12], [13], [14].

První člen ve výrazu (5) určíme dosazením rovnice (4). Označíme-li ($x = \bar{x}$)

$$\left. \begin{aligned} J_\omega &= \int_F \omega^2 dF \\ J_{\bar{x}} &= \int_F \bar{y}^2 dF \\ J_y &= \int_F x^2 dF \\ J_{\omega x} &= \int_F \omega x dF \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

a uvažíme-li, že

$$J_{\omega \bar{y}} = \int_F \omega \bar{y} dF = 0$$

$$J_{\bar{x} \bar{y}} = \int_F \bar{x} \bar{y} dF = 0$$

$$S_{\bar{y}} = \int_F \bar{y} dF = 0$$

$$S_{\bar{x}} = \int_F \bar{x} dF = 0$$

obdržíme:

$$W = \frac{1}{2} (E F \xi'^2 + E J_y \xi''^2 + E J_{\bar{x}} \eta'^2 + E J_\omega \vartheta''^2 + 2 E J_{\omega x} \xi'' \vartheta'' + G J_k \vartheta'^2) \quad (7)$$

kde $J_{\bar{x}}$ a $J_y = J_{\bar{y}}$ jsou hlavní centrální momenty setrvačnosti průřezu,

J_ω — výsečový moment setrvačnosti (rozměr cm^6).

Uvažujeme-li spojité příčné svislé a vodorovné zatížení q_x, q_y a spojité zatížení příčným momentem m_z kolem osy prutu z (vyplyvajícím z excentricity zatížení q_x a q_y od osy prutu), potenciální energie prutu je:

$$U = \int_{z_1}^{z_2} (W - q_x \xi - q_y \eta - m_z \vartheta) dz + [\dots]_{z_1}^{z_2} \quad (8)$$

Nevypsaná závorka za integrálem značí vliv zatížení na koncích prutu z_1, z_2 (včetně podélného zatížení; viz [2]). Tento výraz tvoří funkcionál funkcí $\xi, \eta, \vartheta, \xi'$. Jeho minimum je dáno tzv. Eulerovými rovnicemi, známými z variačního počtu, které pro ξ a ϑ zní:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} \right)' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi''} \right)'' = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta'} \right)' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta''} \right)'' = 0$$

kde Φ je výraz za integrálem v rovnici (8).

Přitom je nutno předpokládat, že na koncích prutu jsou dány buď síly nebo deformace. V případě pružných podpor měli bychom ještě další rovnice. Dosadíme-li výrazy (7), (8) do těchto rovnic, obdržíme výsledné rovnice pro vodorovný ohyb a zkroucení:

$$\left(\frac{B'}{G J_k}\right)' - \frac{B - \alpha_v M_v}{E J_{\bar{\omega}}} = \left(\frac{M_z}{G J_k}\right)' \quad (20)$$

Této rovnice lze užít, jsou-li vedle M_v známy též okrajové podmínky pro bimoment B .

Poznámka

Vákladní rovnice (9a, b) je též možno odvodit [2] tak, že prut rozdělíme na úseky Δz , v nichž považujeme průřez za konstantní. Můžeme tedy pro tento úsek psát známé rovnice [12], nikoli ovšem pro osu smykových středů, ale pro obecnou osu prutu. Jestliže pak mezi jednotlivými úseky jako přechodové podmínky požadujeme spojitost funkcí ϑ , ϑ' a B (nikoliv \bar{B}), obdržíme limitním přechodem $\Delta z \rightarrow 0$ rovnice (9a, b).

Přímé pruty uzavřeného proměnného průřezu

Graždíme napřed prosté kroucení prutu jednoduše uzavřeného symetrického průřezu. Z diferenciální rovnice rovnováhy stěny

$$\frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = 0$$

pro $\sigma = 0$ integrací vyplývá, že smykový tok v celé stěně je konstantní po celém uzavřeném obvodu (v připojených větvích s volným koncem, např. na chodníkové konzole, je nulový).

Z definice kroučícího momentu prostého kroucení

$$M_{zk} = \int_{\bar{F}} \tau \delta \varrho ds$$

pak plyne:

$$\tau = \frac{M_{zk}}{\delta \Omega} \quad (21)$$

kde Ω vyjadřuje dvojnásobnou plochu uvnitř uzavřeného obvodu středního průřezu ($= \oint \varrho ds$).

Průběh deplanace u při prostém kroucení určíme podle rovnice

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau}{G}$$

kam dosadíme v pro tuhý příčný řez podle rovnice (2) a τ podle rovnice (21).

Integrací obdržíme:

$$u = u_0 + \frac{M_{zk}}{G \Omega} \int_0^s \frac{ds}{\delta} - \vartheta' \omega \quad (22)$$

Po oběhnutí průřezu musí být $u = u_0$, z čehož vyplývá známý Bredtův vzorec:

$$M_{zk} = G J_k \vartheta' \quad (23)$$

$$J_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$$

Pro vázané kroucení pak vzhledem k hypotese b) podle vztahů (22) a (23) zavedeme deplanaci:

$$u = \xi - \xi' \bar{x} - \eta' \bar{y} - \kappa \omega_c \quad (24)$$

Ve vzorci je

$$\omega_c = \omega - \frac{J_k}{G} \int_0^s \frac{ds}{\delta} \quad (25)$$

kde ω_c resp. ω je deplanáční funkce uzavřeného průřezu, resp. otevřeného průřezu vzniklého řezem v $s = 0$ [tj. výšeová souřadnice podle vzorce (3)],
 κ — míra deplanace.

Abychom obdrželi vztah mezi κ a ϑ' , dosadíme vztahy (24) a (1) do rovnice

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Obdržíme tak

$$\gamma = \kappa \left(-\varrho + \frac{J_k}{\delta \Omega} \right) + \vartheta' \varrho \quad (26)$$

Integrovaním této rovnice vyplývá vzhledem k definici celkového kroučícího momentu

$$M_{zk} = \oint \tau \varrho \delta ds; \quad \tau = G \gamma$$

vztah

$$\kappa = \frac{\vartheta'}{\nu} - \frac{M_z}{\nu G J_p} \quad (27)$$

kde J_p je tangenciálně-polární moment setrvačnosti průřezu,

ν — průřezová konstanta;

$$\nu = 1 - \frac{J_k}{J_p}$$

Rovnice vázaného kroucení lze opět nejjednodušeji obdržet variačně z podmínky minima potenciální energie. Z rovnice (24) derivováním vyjádříme poměrné protažení $\varepsilon = u'$. (Protože zanedbáme derivace ω_c' , \bar{x}' , \bar{y}' podle z při konstantním s , platí tento krok přesně pouze pro stálý průřez):

$$\varepsilon = \xi' - \xi'' \bar{x} - \eta'' \bar{y} - \kappa' \omega_c \quad (28)$$

Podle hypotese b) přijmeme tuto rovnici z podobných důvodů jako při otevřeném průřezu za základní rovnici pro proměnný průřez. Dosadíme-li ji spolu s rovnicí (27) do výrazu (5), můžeme po úpravách obdržet:

$$W = \frac{1}{2} \left[E J_y \xi''^2 + 2 E J_{\omega x} \xi'' \kappa' + E J_{\omega} \kappa'^2 + \right. \\ \left. + G J_p \vartheta'^2 + 2 G (J_p - J_k) \kappa \vartheta' + G (J_p - J_k) \kappa^2 \right] = \frac{1}{2} \left(E J_y \xi''^2 + 2 E J_{\omega x} \xi'' \kappa' + \right. \\ \left. + E J_{\omega} \kappa'^2 + \nu G J_k \kappa^2 + \frac{M_z^2}{G J_p} \right) \quad (29)$$

kde členy se svislým a podélným posuvem η a ξ jsme vynesli, neboť pro jednoduchost budeme opět uvažovat průřez symetrický podle osy y , u něž rovnice pro svislý průhyb a osový tah jsou nezávislé. Na rozdíl od rovnice (6) zde jsme přitom označili:

$$J_{\omega} = \int_{\bar{F}} \omega_c^2 dF \quad (30)$$

$$J_{\omega x} = \int_{\bar{F}} \omega_c x dF$$

Vzhledem k symetrii $J_{\omega y} = 0, \dots$ atd.

Celková potenciální energie U prutu je dána výrazem tvaru (8), kde však bude výhodné užít rovnici rovnováhy $m_z = -M_z'$ a místo výrazu $-m_z \vartheta$ psát $-M_z \vartheta' + (M_z \vartheta)'$. Obdobně místo $-q_x \xi$ píšme $-M_v \xi'' + [\dots]'$. Potom je:

$$U = \int_{z_1}^{z_2} (W - M_y \xi'' + M_x \eta'' - M_z \theta') dz \quad (31)$$

Eulerovy rovnice pro minimum tohoto funkcionálu vzhledem ke κ a ξ'' jsou:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi''} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \kappa} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa'} \right)' = 0, \dots$$

kde Φ je výraz za integrálem v rovnici (31).

Odtud již plynou výsledné rovnice ve tvaru

$$E J_y \xi'' + E J_{\omega x} \kappa' = M_y \quad (33a)$$

$$-\frac{1}{\nu} (E J_{\omega x} \xi'' + E J_{\omega} \kappa') + G J_k \kappa = M_z \quad (33b)$$

Spolu s rovnicí (27) tvoří systém třech simultánních rovnic pro ξ , κ , θ . Jejich derivováním můžeme obdržet rovnice neobsahující vnitřní síly, obdobně jako v případě rovnice (9).

Rovnice (33a, b) se stávají nezávislými a vodorovný ohyb není doprovázen kroucením pouze v případě, když lze zvolit novou osu z tak, aby $J_{\omega x} = 0$.

Je to možné u prutu stálého průřezu. Je zřejmé, že osa z jakožto osa hlavních pólů je zároveň osou smykových středů. Označíme-li pořadnici smykového středu průřezu vůči ose \bar{z} jako x_y , platí:

$$\bar{\omega} = \omega + x_y x$$

a vzhledem k rovnici (25) též

$$\bar{\omega}_c = \omega_c + x_y x \quad (33c)$$

Smykový střed je tedy i zde dán rovnicí (10) a dále též zde platí rovnice (11) pro výsečový moment setrvačnosti k hlavnímu pólu.

Bimoment uzavřeného průřezu k ose z resp. k hlavnímu pólu zavedeme vztahem

$$B = \int_F \sigma \omega_c dF$$

$$\bar{B} = \int_F \sigma \bar{\omega}_c dF = B - x_y M_y \quad (34)$$

Po dosazení za $\sigma = E \varepsilon$ podle rovnice (28) plyne:

$$B = -E J_{\omega x} \xi'' - E J_{\omega} \kappa' \quad (35a)$$

$$\bar{B} = -E J_{\bar{\omega}} \kappa' \quad (35b)$$

Rovnici (33b) lze potom upravit [znásobí se ν a dosadí se rovnice (27)] na tvar rovnice (17), takže

$$B' = M_{zw}$$

tj. ohybové kroucí moment.

Obdobně jako u otevřeného průřezu lze též odvodit rovnici

$$\frac{1}{\nu} [E J_{\omega} \kappa' + x_y M_y] - G J_k \kappa = M_z \quad (36)$$

kterou lze užít, je-li M_y známé, a rovnicí

$$\left(\frac{B'}{\nu G J_k} \right)' - \frac{B - x_y M_y}{E J_{\bar{\omega}}} = \left(\frac{M_z}{G J_k} \right)' \quad (37)$$

již lze užít k řešení, jsou-li navíc známy i okrajové podmínky pro bimoment B .

Normální napětí je dáno jako $\sigma = E \varepsilon$ rovnicí (28). Tento výraz lze dále upravit na tvar rovnice (18), v němž místo $\bar{\omega}$ stojí $\bar{\omega}_c$ ($J_{\bar{\omega}}$, \bar{B} se vztahují k uzavřenému průřezu). Odpovídající tangenciální napětí lze určit podle diferenciálních rovnic rovnováhy.

Okrajová podmínka pro podélně nezatížený koncový prutu je $\sigma = 0$ a tedy podle rovnic (34) a (35)

$$\kappa' = B = \bar{B} = 0$$

Pro vetknutý konec s nulovou deplanací je podle rovnice (25) $\kappa = 0$ atd.

Dosud jsme uvažovali jen trámy jednoduše uzavřeného průřezu. Podle uvedených rovnic lze však řešit i trámy *souměrného průřezu dvojité komůrky*, neboť u nich střední stěna není namáhána kroucením. Pro vícenásobně uzavřené průřezy bylo by nutno odvodit obecnější rovnice.

Poznámka

Pro deplanaci uzavřeného průřezu je možno volit i jiné tvary funkce ω_c , než jaká plyne z hypotézy c), rovnice (25) (neboť v každém případě jde o přibližné variační řešení). Pro obecnou funkci ω_c by rovnice (10), (28), (29), (33c), (33b), (36), (37) a poslední výrazy v rovnicích (26), (27), (34) a (35) neplatily. V rovnici (29) bylo by třeba nahradit členy obsahující G členem

$$\frac{1}{2} (G J_c \kappa^2 - 2 \nu G J_p \kappa \theta' + G J_p \theta'^2) \quad (37a)$$

kde

$$J_c = \int_F \left(\frac{\partial \omega_c}{\partial s} \right)^2 dF$$

Místo základních rovnic (33) bychom pro obecné ω_c dostali:

$$E J_y \xi'' - E J_{\omega x} \kappa' = M_y \quad (37b)$$

$$\frac{1}{\nu} (-E J_{\omega x} \xi'' + E J_{\omega} \kappa') - \frac{G}{\nu} (J_c - \nu^2 J_p) \kappa = M_z$$

Nejjednodušším tvarem pro funkci ω_c je

$$\omega_c = -x y \quad (37c)$$

což se shoduje s rovnicí (25) a hypotézou c) pro obdélníkový průřez konstantní tloušťky stěn v každé straně. Mají-li stěny náběhy, je tento tvar značně jednodušší než tvar rovnice (25). Rovnice (10), (11), (33c) přitom stále platí a snadno je možno získat i rovnice analogické k rovnicím (36) a (37).

■ Zakřivené pruty

Deformace způsobí změnu křivosti prutu, při níž se dva sousední průřezy ve vzdálenosti dz navzájem pootočí o úhel (vektorově) $k dz$ a posunou o vektor ϵdz . Tím je definována změna křivosti k při dané deformaci a protažení a smykové deformace ϵ . V autorově práci [4] byla odvozena obecná analogie vnitřních sil a deformací u prutů, jež umožňuje určit geometrické rovnice pro složky k_x , k_y , k_z změny křivosti k při malé deformaci jako rovnice analogické k podmínkám rovnováhy. Podle této analogie lze totiž zaměnit složky M_x , M_y , M_z vektoru momentu v průřezu M , složky T_x , T_y , N síly v průřezu S a složky q_x , q_y , q_z specifického zatížení v průřezu q za odpovídající složky ξ , η , ξ posunutí průřezu u , složky φ_x , φ_y , θ pootočení průřezu φ a složky k_x , k_y , k_z změny křivosti k .

Tak např. pro kruhově zakřivený prut, jehož střed leží vpravo od osy z , platí rovnice rovnováhy (pro $m_x = m_y = 0$) elementu:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= M_y'' - \frac{N}{R} \\ q_y &= -M_x'' - \frac{M_z'}{R} \\ q_z &= -N_z' - \frac{M_y'}{R} \\ m_x &= -M_z' + \frac{M_x}{R} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

kde R je poloměr křivosti,
 M_x, M_y — ohybové momenty,
 M_z — krouticí moment.

Odtud zmíněnou záměnou přímo obdržíme geometrické rovnice:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= -\eta'' + \frac{\theta}{R} \\ k_y &= \xi'' + \frac{\xi'}{R} \\ k_z &= \theta' + \frac{\eta'}{R} \\ \varepsilon_z &= \xi' - \frac{\xi}{R} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

pro změny křivosti k_x, k_y, k_z a protažení ε_z v ose prutu.

Speciálním případem jsou výrazy pro přímý prut:

$$k_x = \theta', \quad k_y = \xi'', \quad k_z = -\eta'', \quad \varepsilon_z = \xi'$$

Abychom získali přetvárné rovnice, vyšli bychom u zakřivených prutů ze stejných předpokladů jako u přímých prutů. Dostali bychom tak rovnice pro rozdělení normálních protažení opět ve tvaru rovnice (4) resp. rovnice (28) a (27), kde však místo

$$\xi', \xi'', \eta'', \theta' \quad (40a)$$

by stálo

$$\varepsilon_z, k_y, -k_x, k_z \quad (40b)$$

Potom také výraz pro specifickou potenciální energii W vnitřních sil v průřezu obdržíme z výrazu (7) resp. (29), provedeme-li tuto záměnu.

Poznámka

Přesně bychom místo rovnice (5) měli uvažovat

$$W = \frac{1}{2} \int_F (E \varepsilon^2 + G \gamma^2) \left(1 - \frac{x}{R}\right) dF$$

neboť sousední průřezy nejsou rovnoběžné, ale sbíhají se. Při velkém R lze to však zanedbat.

Výraz pro potenciální energii U prutu má tvar rovnice (8). Dosadíme-li za q_x, q_y, q_z a m_x podle rovnice (38) a integrujeme-li per partes, můžeme jej převést na tvar:

$$U = \int_{z_1}^{z_2} [W - M_y k_y - M_x k_x - M_z k_z - N \varepsilon_z] dz + [\dots]_{z_1}^{z_2} \quad (41)$$

Vidíme, že celý tento výraz lze obdržet i z výrazu (31)

pro přímý prut, provedeme-li v něm zmíněnou záměnu. Tím dostáváme tento jednoduchý výsledek, který dokonce platí nejen pro pruty kruhové, ale i obecně prostorově zakřivené:

Rovnice pro ohyb, kroucení, protažení ap. zakřivených prutů lze obdržet z dříve odvozených rovnic pro přímé pruty, které neobsahují zatížení, ale přímo vnitřní síly M_x, M_y, B atd., zaměníme-li v nich výrazy (40a) za (40b). Lze to provést např. v rovnicích (13), (16), (17), (19), (23), (27), (33), (35), (36) [ale nikoliv v rovnicích (9), (12)]. Rovnice (18), (20), (37) platí beze změny. Tak např. základní rovnice pro pruty otevřeného průřezu podle vztahu (13a, b) jsou:

$$\left. \begin{aligned} E J_y k_y + E J_{\omega\omega} k_z' &= M_y \\ -(E J_{\omega x} k_y)' - (E J_{\omega\omega} k_z')' + G J_k k_z &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

a pro pruty uzavřeného průřezu podle vztahů (27) a (33a, b) jsou:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{k_z}{\nu} - \frac{M_z}{\nu G J_p} \\ E J_y k_y + E J_{\omega\omega} \kappa' &= M_y \\ -\frac{1}{\nu} (E J_{\omega x} k_y + E J_{\omega\omega} \kappa') + G J_k \kappa &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Rovnice (42) [resp. (44)] tvoří spolu s geometrickými rovnicemi (39) pro k_x a k_z systém 4 (resp. 5) simultánních rovnic.

Derivováním získaných rovnic a vyloučením vnitřních sil, např. podle rovnice (38), můžeme případně obdržet rovnice neobsahující statické vnitřní síly (M_x, M_y, \dots), ale pouze zatížení (q_x, m_x, \dots). Systém rovnic se však přitom navíc komplikuje tím, že se stává navzájem závislým i se svislým ohybem.

Řešení rovnic je obdobné jako u přímých prutů. V praktických případech je třeba užít numerické integrace (okrajová podmínka pro podélně nezatížený konec prutu je: $B = \bar{B} = k_z' = 0$, resp. $B = \bar{B} = \kappa' = 0$; pro vetknutý konec s nulovou deplanací: $k_z = 0$, resp. $\kappa = 0$).

■ Poznámky k řešení konstrukcí

K řešení konstrukcí z tenkostěnných prutů lze často nejlépe užít *silové metody*. V konstrukci se zavede tolik staticky neurčitých veličin X_i (statických, nikoliv např. bimomentů), aby v celé konstrukci bylo možno při známých hodnotách X_i určit statické vnitřní síly M_x, M_y, M_z, N atd. podle podmínek rovnováhy.

Poznamenejme však, že větší užití silové metody pro řešení rámu za platnosti zákona rovinných průřezů existuje při vázaném kroucení zásadní rozdíl, neboť problém je nekonečně-krát staticky neurčitý. Vnitřní síly B a M_z ani napětí na základní soustavě nelze určit z podmínek rovnováhy, ale je třeba řešit diferenciální přetvárné rovnice vázaného kroucení. Pouze v případech, kdy lze buď zanedbat ohybové kroucení a uvažovat pouze kroucení prosté (což je přibližně možné pro uzavřené průřezy), nebo zanedbat prosté kroucení a uvažovat pouze kroucení ohybové (což je přibližně možné u otevřených průřezů), lze zavést staticky určitou základní soustavu.

Staticky neurčité veličiny jsou dány známým systémem rovnic:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \delta_{0i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Podle principu virtuálních prací plyne:

$$\delta_{ik} = \int_{(z)} dz \int_F \left(\frac{\sigma^{(i)} \sigma^{(k)}}{E} + \frac{\tau^{(i)} \tau^{(k)}}{G} \right) dF =$$

$$= \int_{(z)} \left(\frac{N^{(i)} N^{(k)}}{E F} + \frac{M_y^{(i)} M_y^{(k)}}{E J_y} + \frac{M_z^{(i)} M_z^{(k)}}{E J_z} + \right. \quad (44)$$

$$\left. - \frac{\bar{B}^{(i)} \bar{B}^{(k)}}{E J_{\bar{\omega}}} + \frac{M_{2z}^{(i)} M_{2z}^{(k)}}{G J_k} \right) dz$$

kde $M_y^{(i)}$ atd. jsou vnitřní síly odpovídající zatížení $X_i = 1$ na základní soustavě ($x_j = 0, j \neq i$),
 $M_y^{(0)}$ — síly od daného vnějšího zatížení ($x_i = 0$).

Dosadíme-li do tohoto výrazu za \bar{B} výraz (16b) resp. (35b) a integrujeme-li per partes, obdržíme:

$$\delta_{ik} = \int_{(z)} \left(\frac{N^{(i)} N^{(k)}}{E F} + \frac{M_y^{(i)} M_y^{(k)}}{E J_y} + \frac{M_z^{(i)} M_z^{(k)}}{E J_z} + \right.$$

$$\left. + [M_z^{(i)} - (\alpha_y M_y^{(i)})'] \vartheta^{(k)} \right) dz - [B^{(i)} \vartheta^{(k)}]_{z_1}^{z_2} \quad (45)$$

kde člen za integrálem je nulový, nejde-li o pružné podpory, $\vartheta^{(k)}$ jsou pootočení na základní soustavě od zatížení $X_k = 1$.

Výhodou silové metody je, že na základní soustavě známe statické vnitřní síly, takže lze užít rovnic nižšího řádu, např. rovnice (13) nebo (19), (20), (33). Zvláště je to výhodné u zakřivených nosníků, kde takto odpadají diferenciální geometrické rovnice (39).

Poznámka

Druhou možnou metodou řešení je metoda *matic přenosu* (zvaná též metoda počátečních parametrů [12] nebo redukční metoda). Při této metodě se volí pro každý prut v počátečním průřezu tolik veličin $\vartheta_1, \vartheta'_1, B_1, M_{z1}, M_{y1}, \dots$, aby základní rovnice (9) apod. mezi zatížením (nikoliv vnitřními silami) a deformacemi bylo možno integrovat. Obvykle je není možno integrovat obecně. Volí

se proto základní jednotkové počáteční stavy $\vartheta_1 = 1, \vartheta'_1 = B_1 = M_{z1} = M_{y1} = \dots = 0$ atd., pro něž se vždy vypočtou odpovídající veličiny $\vartheta, \vartheta', B_1, \dots$ na druhém konci prutu. Totéž se provede i pro dané zatížení a nulový počáteční stav. Závislost veličin na druhém konci prutu na týchž veličinách v počátečním průřezu je pak dána násobením maticí přenosu. Tím se pro každý prut získá systém lineárních rovnic mezi veličinami $\vartheta, \vartheta', B, \dots$ na jednom a na druhém konci. Zavedením daných hodnot do těchto rovnic zůstane systém rovnic pro zbývající veličiny.

LITERATURA

- [1] Argyris, J. H., Dunne, P. C.: The general theory of cylindrical and conical tubes under torsion and bending loads, Jour. Roy. Aer. Soc., 1947, p. 434, 441, 443, 1949 p. 461, 462
- [2] Bažant Z. P.: Nonuniform torsion of thin-walled bars of variable section, Publ. Int. Assoc. for Bridges and Struct. Engng, Zürich 1965
- [3] Bažant Z. P.: Příkladové čáry půdorysně zakřivených mostů, Stavebnický časopis č. 1/1964, str. 17—39
- [4] Bažant Z. P.: Conjugate analogy for space structure, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1966, ST 3, str. 137—150
- [5] Bažant Z. P.: Prostorové namáhání mostních nosníků, Učební text pro V. roč., stavební fakulta ČVUT, Praha 1965
- [6] Byčkov D. V.: Strojitelna mechanika stěrných tonkostěnných konstrukcí, Strojizdat, Moskva 1962
- [7] Cywiński Z.: Teoria skrecania pretów cienkościennych o zmiennej sztywności, Archiwum inżynierii lądowej č. 2/1964 (Warszawa)
- [8] Janatka J.: Přímé tenkostěnné nosníky, SNTL, Praha 1961
- [9] Nowinski J.: Theory of thin-walled bars (feature article), Applied Mechanics Reviews 12, č. 4/1959
- [10] Panc V.: Statika tenkostěnných prutů a konstrukci, NČSAV, Praha 1959
- [11] Rutecki J.: Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych, PWN, Warszawa 1957
- [12] Vlasov V. Z.: Tonkostěnnýje uprugije stěrní, Fizmatgiz, Moskva 1959 (překlad SNTL, Praha 1962)
- [13] Příručka pro stavební inženýry, díl I (překlad z němčiny), SNTL, Praha 1960
- [14] Ingenieur Taschenbuch Bauwesen, Band I, Teubner, Leipzig 1963

Z. P. Bažant: Thin-walled bars with rigid varying section

The article contains a solution based on the assumption that the cross section is rigid and, further on, that the distribution of the longitudinal elongations and of the normal stresses over the section is the same as with a bar with constant section for which it is supposed that the deformation is similar to that caused by simple torsion. The fundamental equations are derived for monosymmetric sections by the variational method. In contradistinction to bars with constant section, it is not possible to choose the axis of shear centres as axis of the bar and, therefore, torsion and horizontal bending are mutually dependent; the relevant differential equations are simultaneous. The solution is carried out for bars with both open and closed section, as well as for bars with curved axis, bars with generally varying section and varying wall thickness. The article contains also the solution of statically indeterminate structures. This theory is very useful for calculations of bridges, especially of those horizontally curved with which large torsional moments are due to arise.

Z. P. Bažant: Dünwandige Stäbe mit steifem veränderlichem Querschnitt

Der Autor führt eine Lösung an, die von der Voraussetzung ausgeht, dass der Querschnitt steif ist und dass ferner die Verteilung der Längsdehnungen und der Normalspannungen über den Querschnitt die gleiche ist wie bei einem Stab mit gleichbleibendem Querschnitt, bei dem dabei angenommen wird, dass die Deformation ähnlich ist wie bei einfacher Drehung. Die Grundgleichungen wurden für monosymmetrische Querschnitte mittels Variationsmethode abgeleitet. Zum Unterschiede von Stäben mit gleichbleibendem Querschnitt kann die Achse der Schubmittelpunkte nicht als Stabachse gewählt werden, und deswegen ist die Drehung und die horizontale Biegung gegenseitig abhängig; die einschlägigen Differentialgleichungen sind simultan. Die Ausführung der Lösung gilt für Stäbe sowohl mit offenem, als auch mit geschlossenem Querschnitt, und ferner für Stäbe mit gekrümmter Achse, allgemein veränderlichem Querschnitt und veränderlicher Dicke der Wände. Der Artikel enthält auch die Lösung statistisch unbestimmter Konstruktionen. Diese Theorie ist von Bedeutung für die Berechnung von Brücken, besonders solcher, die horizontal gekrümmt sind, bei denen grosse Torsionsmomente entstehen.

З. П. Баžант: Тонкостенные стержни жесткого переменного сечения

В статье приводится решение основанное на предположении, что поперечный разрез является жестким и далее, что распределение продольных растяжений и нормальных напряжений по сечению являются одинаковыми как у стержня постоянного сечения, для которого потом принимается во внимание, что деформация является подобной деформации при простом кручении. Основные уравнения выведены для моносимметрических сечений вариационным методом. В различие от стержней

постоянного сечения нельзя выбрать ось середины скольжения в качестве оси стержня и поэтому кручение и горизонтальный изгиб взаимозависимы друг от друга, соответствующие дифференциальные уравнения являются симультанными. Решение проведено для стержней с открытым и замкнутым сечением а далее и для стержней с искривленной осью, обще изменяющегося сечения и переменной толщины стен. Приводится также и решение статически не определенных конструкций. Эта теория имеет значение для расчета мостов, главным образом горизонтально искривленных, у которых возникают большие моменты кручения.