

Elektrické analogie pro dotvarování betonových konstrukcí

ING. ZDENĚK P. BAŽANT, CSc., Stavební ústav ČVUT, Praha

Většina moderních betonových konstrukcí, jako jsou např. letmo betonované rámové mosty, trámy se šikmými závěsy apod., je vzhledem ke spolupůsobení betonu a oceli, betonu různého stáří, různé tloušťky aj. výrazně nehomogenní. Výpočet účinků dotvarování pak vede na poměrně složité systémy obyčejných diferenciálních rovnic nebo obecněji Volterrových integrálních rovnic, jež je třeba řešit na číslicových nebo analogových počítačích. I když jejich elektrické modelování je obecně v principu známo (viz [2] — převedením na jednu diferenciální rovnici vyššího řádu), je možné k analogovému obvodu jednodušeji dospět přímo, nalezneme-li analogii pro zákon dotvarování materiálu a elektrický model odpovídající dané staticky neurčité pružné konstrukci.

V této práci odvodíme napřed, že zákon dotvarování betonu Dischingera-Whitneyho i přesnější zákon Arutjunjana-Maslova aj. je možno znázornit jednoduchými mechanickými reologickými modely, složenými z pružin a tlumičů o časově proměnných konstantách, a to Maxwellovým resp. Boltzmannovým modelem. Potom určíme elektrický obvod analogický k mechanickému modelu a tedy i k zákonu dotvarování, který lze složit z odporů, samoindukcí a kapacit. Nakonec skládáním těchto elementárních obvodů sestavíme analogový obvod pro řešení staticky neurčitých veličin celé konstrukce.

Tato práce byla již přednesena na konferenci [12] v roce 1965.

1. Analogie pro dotvarování časově invariantního materiálu

Lineární dotvarování materiálu s časově neměnnými parametry, tj. např. viskoelasticitu plastických hmot při konstantní teplotě, lze znázornit mechanickými reologickými modely z pružin a tlumičů. Jak známo [4], [5], jejich elektrickou analogii lze realizovat čtyřmi způsoby:

Jsou možné dva typy analogie, v nichž k napětím a rychlostem deformaací odpovídají elektrická napětí a proud (*A*) nebo obráceně (*B*). Modelem různých zákonů dotvarování betonu je obvod, který se skládá ze samoindukcí a odporů (*A*), resp. z kapacit a odporů (*B*), jež obecně jsou časově proměnné. Model pro řešení *n* staticky neurčitých veličin nehomogenní konstrukce je tvořen obvodem (*A*) o *n* navzájem propojených smyčkách a *n* zdrojích napětí, resp. (*B*) o *n* uzlových párech a *n* zdrojích proudu, přičemž jednotlivé prvky obvodu jsou tvořeny elementárními obvody pro dotvarování.

$$(A) \begin{aligned} U_i &= a d\varepsilon_i/dt, & R &= a/b\eta, & \text{-- odpov. --,} \\ I_i &= b\sigma_i, & L &= a/bE, & \text{// odpov. //,} \end{aligned}$$

$$(B) \begin{aligned} U_i &= b\sigma_i, & R &= b\eta/a, & \text{-- odpov. //,} \\ I_i &= a d\varepsilon_i/dt, & C &= a/bE, & \text{// odpov. --,} \end{aligned}$$

$$(C) \begin{aligned} U_i &= a\varepsilon_i, & R &= a/bE, & \text{-- odpov. --,} \\ I_i &= b\sigma_i, & C &= b\eta/a, & \text{// odpov. //,} \end{aligned}$$

$$(D) \begin{aligned} U_i &= b\sigma_i, & R &= bE/a, & \text{-- odpov. //,} \\ I_i &= a\varepsilon_i, & L &= b\eta/a, & \text{// odpov. --.} \end{aligned}$$

Zde značí σ_i resp. ε_i napětí resp. deformaci v pružině nebo v tlumiči, E pérovou konstantu pružiny ($\sigma_i = E\varepsilon_i$), η viskozitu tlumiče ($\sigma_i = \eta d\varepsilon_i/dt$), U_i elektrické napětí a I_i proud v odpovídajícím elektrickém prvku, R ohmický odpor ($U_i = RI_i$), C kapacitu ($I_i = C dU_i/dt$), L samoindukci ($U_i = L dI_i/dt$); a , b jsou volitelné parametry analogie, t je čas, -- a // značí sériové a paralelní zapojení prvků.

2. Analogie pro dotvarování časově variantního materiálu

Dotvarování betonu je komplikováno tím, že závisí na stáří betonu. K jeho znázornění lze pak též použít, jak dále ukážeme, reologických modelů sestavených z pružin a tlumičů, jejichž parametry E_i a η_i jsou však časově proměnné. Pro pružinu v modelu pak již nelze počítat $\sigma_i = E(t)\varepsilon_i$, nýbrž $d\sigma_i/dt = E(t)d\varepsilon_i/dt$. Pro tlumič platí stejný vztah $\sigma_i = \eta(t)d\varepsilon_i/dt$. Poněvadž pro časově proměnný odpor platí $U_i = R(t)I_i$ a nikoliv $dU_i/dt = R(t)dI_i/dt$, nejsou zřejmě analogie *C* a *D* pro dotvarování betonu možné. Uvážíme-li však rovnice pro proměnnou samoindukci $U_i = L(t)dI_i/dt$ resp. kapacitu $I_i = C(t)dU_i/dt$ v porovnání s rovnicí pro pružinu, zjistíme, že analogie *A* a *B* jsou při časově proměnných parametrech materiálu možné a je jimi možno zobrazit dotvarování betonu jakožto stárnutí-ého materiálu.

Protože v mechanickém modelu při paralelním zapojení se sčítají napětí a při sériovém zapojení deformace (podmínky rovnováhy a kompatibility), kdežto v elektrickém obvodu při paralelním zapojení se sčítají proudy a při sériovém zapojení elektrická napětí (první a druhý Kirchhoffův zákon), odpovídá v analogii *A* sériovému zapojení opět sériové a paralelnímu zapojení paralelní, kdežto v analogii *B* sériovému zapojení odpovídá zapojení paralelní a obráceně.

Analogie *A* a *B* lze při proměnných parametrech formulovat ještě obecněji. Požadujeme, aby čas t ve skutečnosti odpovídal času ϑ v elektrickém modelu, přičemž přiřazení $\vartheta = \vartheta(t)$ necht je libovolná spojitá rostoucí funkce, jež může mít pro $t \rightarrow \infty$ konečnou limitu, čímž nekonečnému stáří betonu přiřadíme konečný čas v modelu. Dále v analogii *A* i *B* lze místo konstanty a volit libovolnou spojitou funkci $a(t)$, čímž je možno dosáhnout, aby jeden z parametrů $R(t)$, $L(t)$ nebo $C(t)$ byl konstantní.

Lze se přesvědčit, že analogie jsou pak dány vztahy:

$$A') U_i(\vartheta) = a(t) \frac{d\varepsilon_i(t)}{dt}, R(\vartheta) = \frac{a(t)}{b\eta(t)}, \quad \dots \text{odpov. } \dots$$

$$I_i(\vartheta) = b\sigma_i(t), L(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE(t)}, \quad // \text{ odpov. } //$$

$$B') U_i(\vartheta) = b\sigma_i(t), R(\vartheta) = \frac{b\eta(t)}{a(t)}, \quad \dots \text{odpov. } //$$

$$I_i(\vartheta) = a(t) \frac{d\varepsilon_i(t)}{dt}, C(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE(t)},$$

// odpov. ...

3. Zákon dotvarování betonu a jeho model

Pro obecný vztah napětí σ a deformace ε v jednoosé napjatosti při lineárním dotvarování betonu (jež lze uvažovat pro napětí menší než asi 0,5 pevnosti, vyjma případu většího poklesu napětí) je možno použitím principu superpozice a integrací per partes odvodit Volterrovu integrální rovnici [1], [6], [9]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (1)$$

kde $E(t)$ je časově proměnný modul pružnosti betonu,

t — stáří betonu,

$C(t, \tau)$ — funkce dotvarování vyjadřující deformaci dotvarování v čase t , vzniklou působením konstantního jednotkového napětí zavedeného v čase τ ,

t_0 — okamžik zavedení prvního napětí.

3.1 Nejjednodušším a nejpoužívanějším, přitom však jen dosti hrubě výstižným vyjádřením pro $C(t, \tau)$ je zákon Dischingera-Whitheyho [3], [8], [9]:

$$C(t, \tau) = \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{E_0} \quad (2)$$

kde $\varphi(t)$ je součinitel dotvarování (rostoucí spojitá funkce jedné proměnné s konečnou limitou $\varphi(\infty)$). Dosazením (2) do (1) a derivováním podle φ se odtud obdrží diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\sigma}{E_0} \quad (3)$$

s počáteční podmínkou $\sigma = E\varepsilon$ pro $t = t_0$.

Rovnice pro přetváření tzv. Maxwellova modelu (obr. 1a) zní

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3a)$$

Srovnáním se (3) je zřejmé, že dotvarování betonu podle zákona (2) lze znázornit Maxwellovým modelem (obr. 1a), v němž pérová konstanta pružiny je rovna

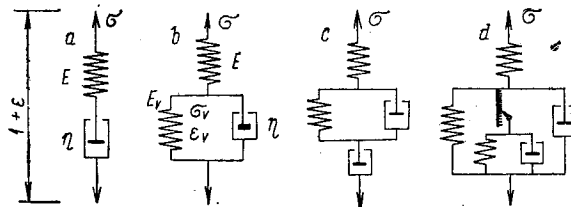
$E(t)$ a viskozita tlumiče je $\eta(t) = \frac{E_0}{d\varphi/dt}$. Dosazením těchto výrazů do A' resp. B' obdržíme elektrickou analogii tohoto zákona dotvarování. V analogii A' je to obvod Aa podle obr. 2, pro nějž platí

$$L(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE(t)}, \quad R(\vartheta) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE_0} \quad (4a)$$

V analogii B' je to obvod Ba podle obr. 2, kde

$$C(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE(t)}, \quad R(\vartheta) = \frac{bE_0}{a(t) d\varphi/dt} \quad (4b)$$

Zvolíme-li parametr a ve tvaru $a(t) = \frac{a_0}{d\varphi/dt}$, dosáhneme výhodně, že v obou analogiích je odpor R konstantní. Přibližně lze pro beton uvažovat $E = \text{konst.}$ a potom při volbě $\vartheta(t) = \vartheta_0\varphi(t) + \vartheta_1$ do-



Obr. 1

sáhneme toho, že též samoodkuce i kapacita jsou konstantní. Pro tento zákon dotvarování lze tedy přibližně vystačit s modely časově invariantními. (Při proměnném E volbou $\vartheta = \int E d\varphi$ bychom též mohli dosáhnout, aby samoodkuce resp. kapacita byly konstantní. Pro nehomogenní konstrukci to však nelze provést, neboť pro různé části konstrukce by ϑ bylo různé.)

3.2 Přesnějším zákonem pro dotvarování betonu je funkce Arutjunjana-Maslova [1], [6], [9]:

$$C(t, \tau) = \psi(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \quad (5)$$

kde $\psi(\tau)$ je vhodné volit ve tvaru $\psi = A_0 + A_1 e^{-\gamma_1\tau}$ [9]. Po dosazení rovnice (5) do (1) můžeme se přesvědčit, že v první i druhé derivaci rovnice (1) podle t pak figuruje tentýž integrál. Jeho eliminací z těchto dvou rovnic je pak možno získat diferenciální rovnici:

$$E \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + E\gamma\varepsilon = \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \gamma \left(1 + E\psi - \frac{1}{E\gamma} \frac{dE}{dt} \right) \frac{d\sigma}{dt} \quad (6)$$

s počátečními podmínkami:

$$E\varepsilon = \sigma \text{ a } E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \gamma E\psi\sigma \text{ pro } t = t_0,$$

plynoucími z rovnice (1) a její první derivace.

Diferenciální rovnice tzv. Boltzmannova (neboli normálního) modelu podle obr. 1b s časově proměnnými parametry E , E_v , η se obdrží z přetvárných rovnic prvků modelu:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varepsilon_v}{dt} \right), \quad \frac{d\sigma_v}{dt} = E_v \frac{d\varepsilon_v}{dt},$$

$\sigma - \sigma_v = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt}$ eliminací ε_v a σ_v v tomto tvaru [9]:

$$E \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{E}{\eta} \left(E_v + \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1}{\eta} \left(E + E_v + \frac{d\eta}{dt} - \frac{\eta}{E} \frac{dE}{dt} \right) \frac{d\sigma}{dt} \quad (6a)$$

s počátečními podmínkami $E\varepsilon = \sigma$ a

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta} \sigma \quad \text{pro } t = t_0.$$

Rovnice (6) a (6a) s počátečními podmínkami jsou totožné, když $\eta(t) = \frac{1}{\gamma\psi(t)}$, $E_V(t) = \frac{1}{\psi(t)} - \frac{d\eta(t)}{dt}$.

Boltzmannův model tedy zobrazuje zákon dotvarování podle rovnice (4). Dosazením E , E_V a η do A' resp. B' obdržíme jako model tohoto zákona dotvarování v analogii A' resp. B' obvody Ab resp. Bb podle obr. 2, pro něž platí:

$$L(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE(t)},$$

$$L_V(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{b} \frac{\gamma\psi^2(t)}{\gamma\psi(t) + d\psi(t)/dt},$$

$$R(\vartheta) = \frac{a(t)}{b} \gamma\psi(t), \quad (7a)$$

resp.

$$C(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{bE(t)},$$

$$C_V(\vartheta) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{a(t)}{b} \frac{\gamma\psi^2(t)}{\gamma\psi(t) + d\psi(t)/dt}$$

$$R(\vartheta) = \frac{b}{a(t)\gamma\psi(t)} \quad (7b)$$

Zvolíme-li parametr analogie $a(t) = a_0/\psi(t)$, dosáhneme toho, že odpor R je konstantní. Přibližně lze uvažovat $E = \text{konst.}$ a potom při volbě $\vartheta(t) = \vartheta_0 E \int \psi(t) dt$ je též L resp. C konstantní. (Při proměnném E bychom též mohli volbou $\vartheta = \vartheta'_0 \int E\psi dt$ dosáhnout, aby L resp. C bylo konstantní. Pro nehomogenní konstrukci to však není možné, neboť ϑ by pro různé části konstrukce bylo různé.) Aby též L_V a C_V bylo konstantní, nelze již u tohoto zákona dosáhnout.

3.3 Boltzmannův model (obr. 1b) a obvody Ab a Bb na obr. 2 zobrazují i obecnější zákon dotvarování: $C(t, \tau) = g(\tau) [h(t) - h(\tau)]$ [9]. Ještě výstižnějším je pro beton reologický model Burgersův podle obr. 1c, který je modelován obvody Ac a Bc . Došli bychom

k němu ze zákona dotvarování: $C(t, \tau) = f(t) - f(\tau) + g(\tau) [h(t) - h(\tau)]$. Odpovídající diferenciální rovnice je též druhého řádu, avšak na rozdíl od (6) a (6a) obsahuje navíc též σ .

3.4 Uvedené elektrické analogie bychom ještě rychleji mohli odvodit, kdybychom vypočetli (A') napětovou resp. (B') proudovou odezvu v čase ϑ na jednotkový skok (A') proudu resp. (B') napětí provedený v čase Θ v obvodech Aa resp. Ba nebo Ab resp. Bb atd. podle obr. 2. Protože časový průběh rychlosti této napětové resp. proudové odezvy má tvar funkce (2) nebo (5) atd., zobrazují tyto obvody dotvarování podle zákona (2) nebo (5) aj.

4. Modely pro dotvarování staticky neurčitých konstrukcí

4.1 Určeme napřed elektrický obvod modelující vztah zatížení $Z(t)$ a jím vyvolané deformace $\delta_X(t)$ ve smyslu dané síly X na staticky určité nehomogenní betonové konstrukci. Pro beton lze velmi dobře přijmout předpoklad, že funkce dotvarování betonu v různých částech konstrukce jsou navzájem afinní [9–11], tj. že funkci dotvarování ve všech částech konstrukce lze psát ve tvaru $\kappa C(t, \tau)$, kde $C(t, \tau)$ je zvolená základní funkce dotvarování pro celou konstrukci a κ je koeficient afinity dotvarování příslušné části (pro ocel např. je $\kappa = 0$, pro homogenní konstrukci je $\kappa = 1$). Deformace $\delta_X(t, \tau)$ vyvolaná v čase t konstantním zatížením $Z(\tau)$ zavedeným v čase τ je dána principem virtuálních prací ve tvaru:

$$\begin{aligned} \delta_X(t, \tau) &= \int_V -\sigma \left[\frac{1}{E(\tau)} + \kappa C(t, \tau) \right] dV = \\ &= \int_V \frac{-\sigma}{E(\tau)} dV + C(t, \tau) \int_V -\sigma \kappa dV \end{aligned} \quad (8)$$

kde σ značí napětí od konstantního zatížení $Z(\tau)$, jež je časově neměnné,

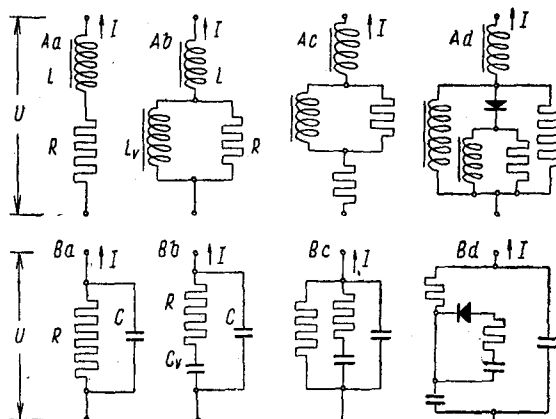
$-\sigma$ — napětí od virtuálního zatížení $X = 1$ ve smyslu X ,

V — objem konstrukce. Z posledního členu výrazu (8) je na první pohled zřejmé, že dlouhodobá složka $\delta_X(t, \tau)$ (za předpokladu afinity dotvarování) je úměrná funkci $C(t, \tau)$.

Proto elektrická analogie pro vztah δ_X a $Z(t)$ při libovolně proměnném zatížení je dána opět obvody Aa resp. Ba nebo Ab resp. Bb atd. na obr. 2 pro příslušný zákon dotvarování. Jejich parametry se určí obdobným způsobem podle rovnice (8) (záměnou funkcí $E(t)$, $\varphi(t)$ nebo $\psi(t)$ atd. v rovnici (4a, b) nebo (7a, b) za funkce odpovídající rovnici (8)).

4.2 Přetváření staticky neurčité nehomogenní konstrukce je vázáno podmínkami kompatibility, vyžadujícími nulovou výslednou deformaci rovnovážného základního staticky určitého systému ve smyslu jednotlivých staticky neurčitých veličin X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) od vnějšího zatížení $Z(t)$ a od zatížení jednotlivými staticky neurčitými veličinami X_1, \dots, X_n .

Protože tyto deformace za předpokladu afinity dotvarování jsou podle odst. 4.1 opět vyjádřeny za stálého napětí rovnicemi tvaru (8), platí pro vztahy de-



Obr. 2

formace ve smyslu X_i a vnějšího zatížení $Z(t)$ nebo staticky neurčité veličiny X_k opět obvody (iZ) nebo (ik) tvaru Aa resp. Ba nebo Ab nebo Bb atd., jejichž parametry se určí podle rovnice tvaru (8) pro vztah příslušného zatížení a deformace. Elektrický model staticky neurčité konstrukce potom obdržíme takovým vzájemným propojením obvodů (iZ) a (ik) ($i, k = 1, \dots, n$), jaké odpovídá podmínkám rovnováhy a kompatibility.

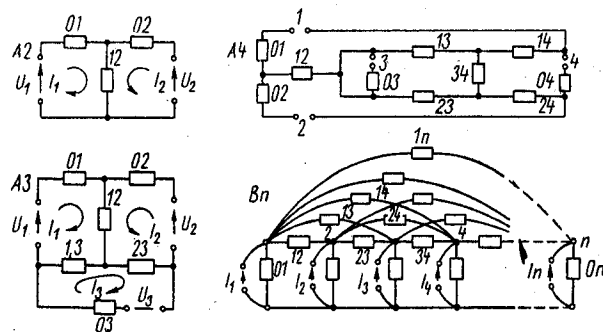
Pro propojení těchto obvodů platí Kirchhoffovy zákony bez ohledu na jejich vnitřní uspořádání (tj. uvažujeme-li obvod Aa nebo Ba atd.), stejně jako v konstrukci platí podmínky rovnováhy a kompatibility bez ohledu na přetvárný zákon materiálu. Stačí proto sestavit obvod modelující řešení staticky neurčitých veličin pružné konstrukce, složený pouze z prvků jediného typu (tj. v analogii A' pouze ze samoindukcí resp. v analogii B' pouze z kapacit), a záměnou těchto prvků za elementární obvody (iZ) a (ik) tvaru Aa nebo Ab atd. dostaneme obvod modelující řešení staticky neurčitých veličin dotvarující se konstrukce. Případně můžeme napřed sestavit pouze z odporů obvod modelující řešení pružné konstrukce v analogii C resp. D a záměnou odporů za samoindukce resp. kapacity dostaneme model pružné konstrukce v analogii A' resp. B' .

Z definice analogií je přímo vidět, že staticky neurčité veličiny jakožto síly jsou v analogii A' (stejně jako v C) modelovány proudem, resp. v analogii B' (nebo D) napětím, a dále že podmínky rovnováhy odpovídají v analogii A' prvnímu zákonu Kirchhoffovu (nulový součet proudů vtékajících do uzlu) resp. v analogii B' druhému zákonu Kirchhoffovu (nulový součet napětí podél uzavřené smyčky). Řešením obvodu podle smyčkových proudů v analogii A' resp. podle napětí uzlových párů v analogii B' jsou tyto podmínky předem splněny [7]. Podmínky kompatibility konstrukce ve staticky neurčitých vazbách pak odpovídají v analogii A' (nebo C) druhému zákonu Kirchhoffovu, v analogii B' (nebo D) prvnímu zákonu Kirchhoffovu.

Problém struktury obvodu jsme tedy redukovali na nalezení obvodu modelujícího řešení systému n lineárních algebraických rovnic se symetrickou maticí. V analogii A' (nebo C) musí obvod obsahovat n smyček o n prvcích, z nichž každé dvě smyčky obecně musí mít společný prvek, v analogii B' (nebo D) musí obsahovat n uzlových párů, přičemž každé dva uzlové páry musí být obecně propojeny jedním prvkem. Přitom každá smyčka musí obsahovat jeden zdroj napětí, modelující deformaci základního systému ve smyslu X_i od vnějšího zatížení (tj. od proudu ve smyčce, jsou-li ostatní smyčky bez proudu — naprázdno). Stejně v analogii B' v každém uzlovém páru tento zatěžovací člen je modelován zdrojem proudu (a zatížení odpovídá napětí, jsou-li ostatní uzlové páry bez napětí, ve zkratu). Deformaci základního systému od zatížení $X_i = 1$ ve smyslu X_k odpovídá v analogii A' napětí na svorkách smyčky i , způsobené jednotkovým zdrojem proudu ve smyčce k , jsou-li všechny ostatní smyčky bez zdroje (naprázdno), a obdobně v analogii B' proud v uzlovém páru i bez napětí (ve zkratu), způsobený jednotkovým zdrojem napětí v uzlovém páru k , jsou-li všechny ostatní uzlové páry bez napětí (ve zkratu).

V analogii A' tak dostáváme jako model 2krát, 3krát a 4krát staticky neurčité konstrukce obvody Aa , Ab , Ac

podle obr. 3 (jsou to tzv. N -póly), v analogii B' obecně pro nkrát staticky neurčitou konstrukci obvod B podle obr. 3. Pod jednotlivými prvky těchto obvodů je třeba si představit elementární obvody Aa nebo Ab resp. Ba nebo Bb atd. podle obr. 2. Koeficienty prvků tohoto obvodu je přitom možno odvodit podle rovnice (8), aniž bychom sestavovali systém diferenciálních rovnic, převáděli jej na jednu rovnici prvního řádu a hledali její analogii. (Poznámka: Při vykreslení obvodu v analogii se vyskytnou trojice samoindukcí zapojené do T , které lze ekvivalentně nahradit dvěma paralelními samoindukcemi se vzájemnou samoindukcí, tj. transformátorem.)



Obr. 3

Pro ilustraci napíšeme systém rovnic, na něž vede řešení obvodu pro speciální případ pružné konstrukce, kdy jednotlivé prvky znamenají (A) samoindukce, resp. (B) kapacity (kdežto v analogiích C , D by to byly odpory). Použitím druhého resp. prvního zákona Kirchhoffova dostaneme (A) systém algebraických rov-

$$\text{nic: } U_i = - \sum_{k=1}^n L_{ik} \frac{dI_k}{dt} \text{ pro } \frac{dI_k}{dt}, \text{ kde } L_{ii} = - \sum_{r=0(r \neq i)}^n L_{ir} \text{ (obr. 3, obvody } Aa, Ab, Ac), \text{ resp. (B)}$$

$$\text{systém rovnic } I_i = - \sum_{k=1}^n C_{ik} \frac{dU_k}{dt} \text{ pro } \frac{dU_k}{dt}, \text{ kde}$$

$$C_{ii} = - \sum_{r=0}^n C_{ir} \text{ (obr. 3, obvod B). Zároveň z těchto}$$

rovnic můžeme zjistit, že při jisté volbě smyslů smyčkových proudů resp. napětí uzlových párů jsou všechny nedíagonální koeficienty matice systému záporné. Lze proto použít přímo těchto obvodů pouze k řešení těch konstrukcí, u nichž lze zavést staticky neurčité veličiny tak, aby všechny nedíagonální koeficienty matice pružnosti byly záporné, což je možné u většiny praktických konstrukcí. Pro ostatní případy bylo nutno zavést elektrické prvky, jež by se při libovolném průběhu napětí jevily jako záporné samoindukce, záporné kapacity nebo záporné odpory.

Elektrický lze modelovat snadno i různými nelineárními efekty v dotvarování betonu. Tak například nevratné dlouhodobé deformace lze v mechanickém modelu znázornit pomocí západky (obr. 2d) [9]. V odpovídajícím elektrickém modelu Ad , Bd na obr. 2 západce odpovídá dioda. Pomocí nelineárních samoindukcí, kapacit a odporů lze znázornit nelinearitu dotvarování v závislosti na napětí při vysokém napětí.

Týmiž modely je možno zobrazit i dotvarování konstrukcí z plastických hmot při proměnné teplotě, neboť v tomto případě parametry materiálu jsou též časově proměnné. Ve speciálním případě časově neměnných parametrů tyto modely zobrazují chování konstrukcí z plastických hmot při stálé teplotě.

Literatura

- [1] *Arutjunjan N. Ch.*: Někotoryje voprosy teorii polzučesti. Moskva, Tehteorizdat 1952.
- [2] *Belaš P. M.*: Osnovy vyčíslitělnoj techniky, kap. 1. Moskva, Nedra 1964.
- [3] *Dischinger F.*: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere Bogenbrücken. Bauingenieur 1939, 53—63, 286 až 294, 426—37, 563—72.
- [4] *Eirich F. R.* a kol.: Rheology. Theory and applications, Vol. 1, New York, Accad. Press 1956.
- [5] *Holzmüller W., Altenburg K.* a kol.: Physik der Kunststoffe. Berlin, Akademie Verlag 1961.
- [6] *Prokopovič J. E.*: Vlijanije dlitelnych processov na naprjažennoje i deformirovannoje sostojanija sooruženij, Gosstrojizdat 1963.
- [6a] *Tetelbaum I. I.*: Električeskoje modelirovanije. Moskva, Fizmatgiz 1959.
- [7] *Trnka Z.*: Teoretická elektrotechnika, I. Praha, SNTL 1956.
- [8] *Ulickij I. I.* a kol.: Rasčet železobetonnych konstrukcij s učetom dlitelnych processov. Kijev, Gosstrojizdat 1960.
- [9] *Bažant Z. P.*: Dotvarování betonu při výpočtu konstrukcí. Praha, SNTL 1966.
- [10] *Bažant Z. P.*: Teorie dotvarování a smršťování betonu v nehomogenních konstrukcích a průřezch. Stavebnický časopis Slov. akad. věd, č. 9, 1962, 552—76.
- [11] *Bažant Z. P.*: Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen, 5. Kongres „Int. Assoc. Bridge Struct. Engng“. Prelim. Publ., V, 837—98, Rio de Janeiro 1964.
- [12] *Bažant Z. P.*: Electric analogues for creep of concrete structures. Sborník „Conference on Experimental Methods of Investigating Stress and Strain in Structures“, str. 207—218, Praha, Stavební ústav ČVUT, 5.—8. X. 1965.