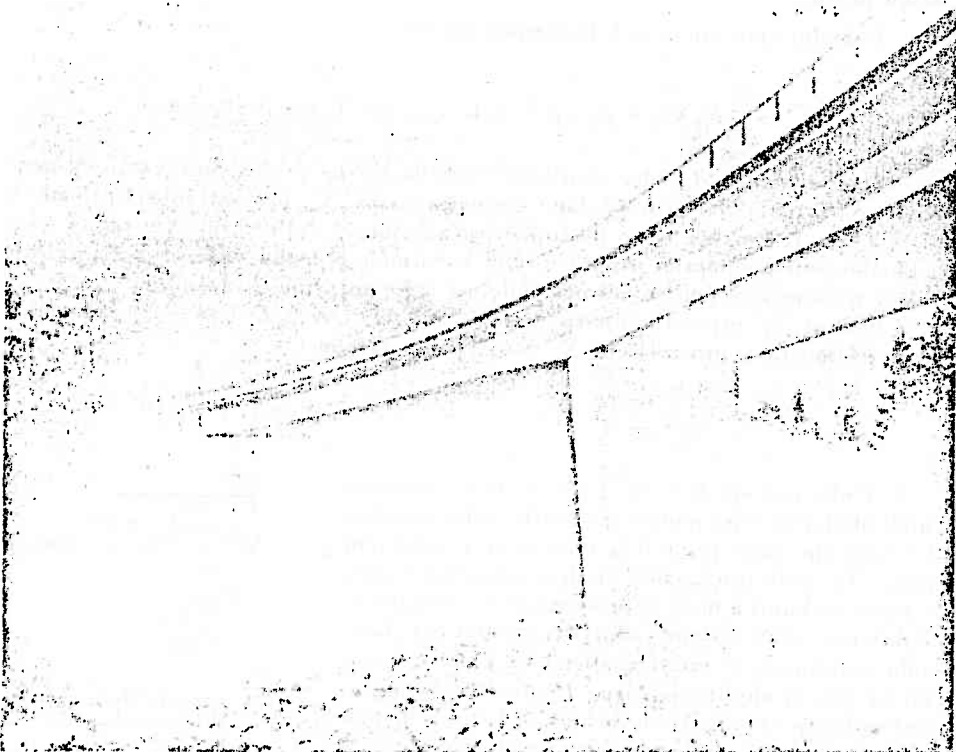


Inž. ZDENĚK P. BAŽANT, C. Sc.

Dopravoprojekt, Praha

PŘÍČINKOVÉ ČÁRY PŮDORYSNĚ ZAKŘIVENÝCH MOSTŮ

Pro moderní projektování silnic je charakteristické, že mostní objekty se stále více podřizují požadavku plynulého vedení trasy. Zdůrazňování tohoto požadavku si vynutilo napřed stavbu šikmých mostů a v poslední době i stavbu mostů půdorysně zakřivených, sledujících směrový oblouk trasy. Zakřivené mosty často bývají jak úsporným, tak smělým a architektonicky též účelově velmi estetickým řešením, působícím prostorovým ztvárněním křivých nosníků (obr. 1). Řešení, kdy trasa v oblouku je umístována na přímá mostní pole malého rozpětí, je dnes mnohdy opouštěno, a to



Obr. 1. Perspektivní pohled mostu v Kořenově přes Jizeru podle obr. 13.

Рис. 1. Перспектива моста через Язеру в Корженове согласно рис. 13.

Fig. 1. Perspective view of the bridge over the Jizera River at Kořenov, see Fig. 13.

i v případech, kdy by provedení mezilehlých podpor bylo možné. Pro projektanta však přináší zakřivené mosty značné obtíže, neboť jejich přesný výpočet bývá teoreticky komplikovaný a pracný a ani tak jim často při nutných zjednodušeníh nelze přesně vyjádřit skutečné statické působení.

Prímý výpočet vnitřních sil od daného zatížení u zakřivených mostů s kloubovými podporami uspořádanými v normále oblouku byl již podán v četných pracích, z nichž z poslední doby jmenujme aspoň práci J. Courbona [1].

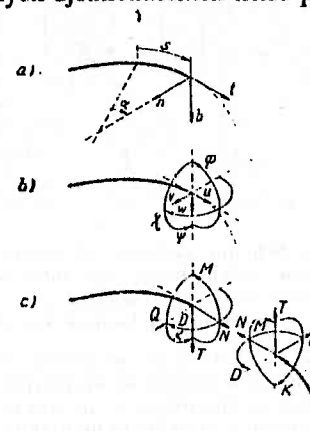
Předmět zkoumání. V této práci se budeme zabývat půdorysně zakřivenými mosty trámovými a rámovými, působícími jako konstrukce prutová. Patří sem takové mosty, jejichž průřezové rozměry jsou vůči délce prutů dostatečně malé (šířka max. asi 1/4 délky), takže plošné působení deskové, roštové a stěnové je zanedbatelné.

Zjednodušující předpoklady. Řešení založíme na těchto hlavních zjednodušujících předpokladech: 1. Dokonalá lineární pružnost materiálu, homogenita a izotropie. — 2. Navierova hypotéza o ohybu. — 3. Saint-Venantova teorie kroucení, tj. volná torze s volným zborcením průřezů. Podle tohoto předpokladu se zavádí mezi krouticím momentem K a poměrným úhlem zkroucení ϑ vztah $K = GJ_k \vartheta$, kde GJ_k je tuhost v kroucení. Ve skutečnosti platí složitější vztah $K = GJ_k \vartheta - E\Gamma \vartheta''$, kde $E\Gamma$ je jistá konstanta (tuhost). Druhý člen, který vyjadřuje vliv bortících sil, lze zanedbat u průřezů plných a u tenkostěnných uzavřených průřezů málo odlišné šířky od výšky, nikoliv však u otevřených průřezů. — 4. Zanedbání případného plošného deskového, roštového nebo stěnového působení, vyplývající ze zjednodušení nosníku na prut.

U zakřivených nosníků nepůsobí svislé stálé ani nahodilé zatížení v těžištích průřezů, ale v těžištích výsečových délkových elementů prutů nebo případně zatěžovací plochy, která jsou mírně posunuta směrem od středu křivosti, a to tím více, čím větší je křivost. U obvyklých poloměrů jsou excentricity zatížení malé a lze je zanedbat.

Geometrický tvar. S hlediska geometrického tvaru konstrukce je nutno uvést, že ohybové momenty se vztahují k těžištím průřezů, kdežto krouticí momenty k jejich smykovým středům, které v obvyklém případě průřezů souměrných jen podle svislé osy jsou půdorysně totožné s těžišti, výškově však nikoliv. Množinu těžišť nazýváme střednicovou křivkou křivého prutu a budeme ji uvažovat jako vodorovnou rovinnou křivku. Většinou se jedná o kruhový oblouk.

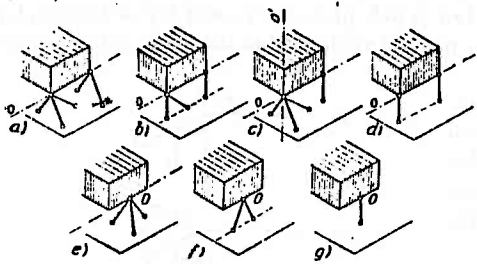
Geometrické veličiny. Za parametr střednicové křivky je nejlépe volit úhel α normály, tj. u kruhového oblouku středový úhel. Směr vzrůstu parametru neboli kladný směr oběhu křivky zvolíme tak, aby při obíhání křivky ležel střed křivosti vpravo. Průvodní trojhran střednicové křivky je tvořen jednotkovými vektory t, n, b [obr. 2a)] orientovanými tak, aby tečný vektor t souhlasil se směrem vzrůstu parametru α , normálový



Obr. 2. a) Průvodní trojhran střednicové křivky, b) složky posunutí a složky pootočení, c) složky vnitřních sil a momentů v průřezu.

Рис. 2. а) система векторов кривой средней линии, б) подвижная перемещения и углы поворота, в) компоненты внутренних сил и моментов в сечении.

Fig. 2. a) Vector system of median line curve, b) displacement and deflection components, c) components of internal forces and moments in the section.



Obr. 3. Schéma podpory a) pevné kloubové, b) posuvné kloubové, c) točnové kloubové, d) kyvné kloubové, e) bodové pevné, f) bodové posuvné, g) bodové kyvné.

Рис. 3. Схемы опор: а) неподвижная шарнирная, б) подвижная шарнирная, в) вращающаяся шарнирная, д) двухстержневая шарнирная, е) точечная неподвижная, ф) точечная подвижная, г) точечная стержневая.

Fig. 3. Scheme of support with a) fixed hinge bearing, b) sliding hinge bearing, c) turnplate hinge bearing, d) pendulum hinge bearing, e) fixed point bearing, f) sliding point bearing, g) pendulum point bearing.

ně jsou tehdy, působí-li na část od řezu zpět, tj. proti smyslu oběhu, ve smyslu vektorů b, n, t a na část od řezu vpřed pak ovšem opačně. Momentové složky jsou svislý ohybový moment M , vodorovný ohybový moment D a krouticí moment K , které otáčejí po řadě kolem vektorů n, b, t [obr. 2c)]. Na část od řezu zpět a od řezu vpřed ve vzájemně opačných smyslech. Kladné jsou tehdy, jestliže část od řezu zpět otáčejí kolem příslušných osových vektorů n, b, t kladně. Osové vektory momentů budeme na obrázcích kreslit dvojitou šipkou.

Podpěření. Stupeň statické neurčitosti konstrukce vyplývá ze způsobu jejího podpěření a vzájemného spojení jejích částí. Hlavní druhy podpor nebo vazeb dvou částí jsou vetknutí, pevná kloubová podpora, posuvná kloubová podpora a případně točnová kloubová podpora a posuvná podpora, jež po řadě ruší 6, 5, 3, 4 a 2 stupně volnosti (obr. 3). Podpora bodová pevná, bodová posuvná a bodová kyvná aj., jež po řadě ruší 3, 2, 1 stupňů volnosti, se pro velké soustředěné tlaky většinou neužívají.

Obecný výpočet příčinkových čar

Příčinkové čáry rozlišujeme dvojího druhu, a to jednak čáry pro zatížení pohyblivým centrickým svislým jednotkovým břemenem, jednak čáry pro zatížení pohyblivým jednotkovým příčným momentem, z nichž lze určovat účinky excentrických zatížení. Příčinkové čáry budeme uvažovat jako čáry ohybové. Platí, že příčinková čára statické veličiny X_i na n -krát staticky neurčité soustavě je ohybovou čarou pro deformaci velikosti -1 ve smyslu veličiny X_i na soustavě $(n - 1)$ krát staticky neurčité, vzniklé z dané soustavy uvolněním vazby X_i . Tato ohybová čára je úměrná ohybové čáře téže $(n - 1)$ krát staticky neurčité soustavy pro zatížení $X_i = -1$. Výpočet se provede v těchto krocích:

vektor n směřoval do středu křivosti a vektor binormály b dolů, takže systém (t, n, b) je pozitivní. U složeného protisměrného oblouku je nutno v protisměrné části považovat smysl oběhu za záporný.

Deformace. Deformace i vnitřní síly je nutno uvažovat vektorově. Složky posunutí ve smyslu vektorů t, n, b [obr. 2b)] označíme postupně u, v, w (w je průhyb). Pootočení kolem vektorů t, n, b v určitém bodě křivky označíme postupně φ, ψ, χ . Jsou kladná, otáčejí-li kolem příslušných vektorů v kladném smyslu, tj. tak, že při pohledu s konce příslušného osového vektoru se pootočení děje proti smyslu pohybu hodinových ručiček.

Vnitřní síly. Část oddělenou řezem v určitém bodě prutu nahradíme třemi silovými a třemi momentovými složkami. Silové složky po řadě ve smyslu vektorů b, n, t jsou svislá posouvající síla T , vodorovná posouvající síla Q a normální síla N [obr. 2c)]. Klad-

1. Zvolíme základní staticky určitou soustavu o n staticky neurčitých vazbách X_1, \dots, X_n .

2. Pomocí výminek rovnováhy určíme vnitřní síly $\bar{M}_i, \bar{D}_i, \bar{R}_i$ a případně též \bar{Q}_i, \bar{N}_i základní staticky určité soustavy pro zatěžovací případy $\bar{X}_i = 1, i = 1, \dots$. Výminky rovnováhy je nutno uvažovat vektorově.

3. Odtud vypočteme koeficienty pružnosti konstrukce δ_{ij} , vyjádřující deform. základní soustavy ve smyslu veličiny X_i pro zatěžovací případ $\bar{X}_j = 1$. Jsou dá vztahem

$$\delta_{ij} = \int_c \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} ds + \int_c \frac{\bar{K}_i \bar{K}_j}{GJ_k} ds + \int_c \frac{\bar{D}_i \bar{D}_j}{EI} ds,$$

kde vliv normálních a posouvajících sil bez újmy na obecnosti nevypisujeme. \int hodnoty posledního členu, v němž zjednodušeně neuvažujeme vliv křivosti prutu bývají často zanedbatelné. V rov. (1) značí E, G moduly pružnosti, J , resp. I moment setrvačnosti průřezů pro ohyb ve svislé rovině tečné, resp. ve vodorovné rovině. J_k hradní moment setrvačnosti v kroucení, c integrace přes všechny pruty konstrukce délku prutů.

4. Řešením systému $n - 1$ lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k^{(i)} = \delta_{ik} \quad j, k = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$$

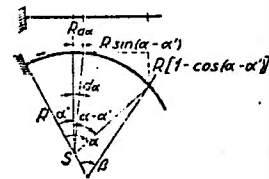
nalezneme hodnoty staticky neurčitých veličin $X_k^{(i)}$ na $(n - 1)$ krát staticky neurčité soustavě, vzniklé ze soustavy dané zrušením vazby X_i pro zatěžovací případ $X_i = X_i^{(i)} = -1$. Provede se to postupně pro všechna X_i . Pro kruhové spojitě nosné s kloubovými podporami uspořádanými v normále oblouku odvodil J. Courbon řešení třímomentovými rovnicemi obdobné k řešení přímých nosníků.

Z hodnot $X_k^{(i)}$ plynou hodnoty vnitřních sil $M^{(i)}, K^{(i)}, D^{(i)}$ $(n - 1)$ krát staticky neurčité soustavy pro zatížení $X_i = -1$ podle vztahu

$$M^{(i)} = \bar{M}_i + \sum_k \bar{M}_k X_k^{(i)}, \dots \quad k = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n.$$

5. Podle hodnot $M^{(i)}, K^{(i)}, D^{(i)}$ by bylo možno již určit ohybovou čáru půdorysně zakřiveného nosníku, kdybychom znali průhyb a pootočení v některém bodě. Ty však jsou známy předem jediné u konzoly v jejím vetknutí a musí se proto postupovat oklikou. Zakřivený prut budeme napřed pokládat za konzolu vetknutou v určitém zvoleném bodě a vypočteme pro ni ohybovou čáru. Pootočením a posunutím taktž vypočtené ohybové čáry konzoly je pak možno přejít na ohybovou čáru vyhovující danému podpěření nosníku.

Pro jednoduchost uvažujme již v dalším pouze nosník v kruhovém oblouku poloměru R . Středový úhel α se měří od bodu, kde jsme dočasně předpokládali ve-



Obr. 4. Určení deformace kruhové zakřivené konzoly.

Рис. 4. Определение деформации консольной имеющей в по формулу дуги окружности

Fig. 4. Strain determination of a circular cantilever beam

tknut' ($\alpha=0$). Svislé průhyby konzoly odpovídající vnitřním silám $M^{(i)}, K^{(i)}, D^{(i)}$ označme \tilde{w}_i , a příčná pootočení $\tilde{\psi}_i$. Délkový prvek $ds = R dx'$ zakřiveného prutu v místě daném úhlem α' přetvoří se tak, že se jeho krajní průřezy pootočí ve svislé tečné rovině o úhel $\frac{M^{(i)}}{EJ} R dx'$ a v příčné normálové rovině o úhel $\frac{K^{(i)}}{GJ_k} R dx'$. Integrací příspěvků pootočení všech prvků $R dx'$ od $\alpha' = 0$ do $\alpha' = \alpha$ plyne odtud celkový průhyb $\tilde{w}_i(\alpha)$ a příčné pootočení $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ nosníku, vetknutého v bodě $\alpha' = 0$.

$$\tilde{w}_i(\alpha) = R^2 \int_{\alpha'=0}^{\alpha} \left\{ -\frac{M^{(i)}}{EJ} \sin(\alpha - \alpha') + \frac{K^{(i)}}{GJ_k} [1 - \cos(\alpha - \alpha')] \right\} d\alpha', \quad (4a)$$

$$\tilde{\psi}_i(\alpha) = R \int_{\alpha'=0}^{\alpha} \left\{ \frac{M^{(i)}}{EJ} \sin(\alpha - \alpha') + \frac{K^{(i)}}{GJ_k} \cos(\alpha - \alpha') \right\} d\alpha'. \quad (4b)$$

Vzorce pro $\tilde{w}_i(\alpha)$ a $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ v poněkud jiném tvaru odvodil již Bresse [1].

Obdobným způsobem lze získat výraz pro pootočení $\tilde{\varphi}_i^{\beta}(\alpha)$ v bodě α zakřiveného nosníku vetknutého v bodě $\alpha = 0$ ve svislé rovině odkloněné od normály v bodě $\alpha = 0$ o úhel β a pro pootočení $\tilde{\chi}_i(\alpha)$ ve vodorovné rovině

$$\tilde{\varphi}_i^{\beta}(\alpha) = R \int_{\alpha'=0}^{\alpha} \left[\frac{M^{(i)}}{EJ} \sin(\beta - \alpha') + \frac{K^{(i)}}{GJ_k} \cos(\beta - \alpha') \right] d\alpha', \quad (4c)$$

$$\tilde{\chi}_i(\alpha) = R \int_{\alpha'=0}^{\alpha} \frac{D^{(i)}}{EI} d\alpha'. \quad (4d)$$

6. Abychom z ohybové čáry $\tilde{w}_i(\alpha)$, resp. $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ získali příčinkovou čáru, musíme ji jednak znásobit jistým koeficientem k , určeným tak, aby deformace ve smyslu staticky neurčité veličiny X_i měla velikost -1 , jednak ji pootočit v bodě $\alpha = 0$, v němž bylo dočasně předpokládáno vetknutí konzoly, o úhly φ_0 kolem normály n a ψ_0 kolem tečny t a případně ji též svisle posunout o hodnotu w_0 . Matematickým vyjádřením dostaneme:

$$\eta_{X_i}(\alpha) = -\varphi_0 R \sin \alpha + \psi_0 R (1 - \cos \alpha) + w_0 + k \tilde{w}_i(\alpha), \quad (5a)$$

$$\zeta_{X_i}(\alpha) = \varphi_0 R \sin \alpha + \psi_0 R \cos \alpha + k \tilde{\psi}_i(\alpha), \quad (5b)$$

kde $\eta_{X_i}(\alpha)$ značí příčinkovou čáru veličiny X_i pro zatížení pohyblivým svislým centrickým jednotkovým břemenem a $\zeta_{X_i}(\alpha)$ pro zatížení příčným jednotkovým momentem.

Zbývá určit hodnoty φ_0, ψ_0, w_0 a k . Získají se z okrajových podmínek příčinkové čáry, tj. z podmínek podepření nosníku, a z podmínky deformace velikost -1 ve smyslu veličiny X_i . Pro jejich určení je zapotřebí systému nejvýše čtyř rovnic, většinou však jedné nebo dvou, plynou-li některé hodnoty přímo. Zbývající okrajové podmínky ohybové čáry lze použít ke kontrole.

7. Příčinkové čáry ostatních vnitřních sil v poli lze vyjádřit ve tvaru

$$\eta_M(\alpha) = \bar{\eta}_M(\alpha) + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \eta_{X_i}(\alpha), \quad \zeta_M(\alpha) = \bar{\zeta}_M(\alpha) + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \zeta_{X_i}(\alpha), \quad \eta_K(\alpha) = \dots, \quad (6)$$

kde \bar{M}_i, \dots , resp. $\bar{\eta}_M(\alpha), \bar{\eta}_K(\alpha), \dots$ jsou hodnoty vnitřních sil pro $\alpha = \alpha_0$, jejichž příčinkové čáry hledáme, na základní staticky určité soustavě pro zatížení $\bar{X}_i = 1$, resp. jejich příčinkové čáry, které se určí z podmínek rovnováhy.

Řešení různých typů konstrukcí kruhově zakřivených

A. *Spojité nosník o dvou polích.* Nosník abc nechť má dvě souměrná pole stejného rozpětí, odpovídajícího středovému úhlu α_0 (obr. 5a). Střední kloubová podpora b je pevná a má směr normály oblouku, krajní kloubové podpory a, c jsou posuvné a svírají se střední kloubovou podporou b úhel β a $-\beta$. Příklad kolmých podpor a, c by nastal pro $\beta = \alpha_0$. Šikmé podpory ve směru $\beta = \frac{\alpha_0}{2}$, jež jsou kolmé k těživě pole, jsou nejvhodnější s hlediska dilatování nosníku, neboť dilatováním nevznikají pak žádné síly. (Nevztahuje se na kyvnou kloubovou podporu, např. z vrstvené gumy.)

Daný nosník je prostorově 5-krát staticky neurčitý, pro svislé zatížení však jen 3-krát, neboť na základní soustavě nevznikají deformace ve vodorovné rovině. Základní staticky určitou soustavu vytvoříme přetnutím nosníku ve střední podpoře b . Tímto řezem vystoupí jako staticky neurčité veličiny svislý ohybový moment X_1 nad podporou b , krouticí moment X_2 vlevo od b a krouticí moment X_3 vpravo od b (obr. 5b).

Prvkem základní soustavy je křivý nosník bc , podepřený v bodě b ($\alpha = 0$) pevnou bodovou podporou a v bodě c ($\alpha = \alpha_0$) posuvnou kloubovou podporou (obr. 5b). Z momentových výminek rovnováhy pole k ose podpory c plynou hodnoty vnitřních sil $\bar{M}_i, \bar{K}_i, \bar{T}_i$ v bodě α na základní soustavě od zatížení $\bar{X}_i = 1$

$$\bar{M}_1(\alpha) = \cos \alpha + \bar{T}_1(0) R \sin \alpha, \\ \bar{K}_1(\alpha) = \sin \alpha + \bar{T}_1(0) R (1 - \cos \alpha), \quad (7)$$

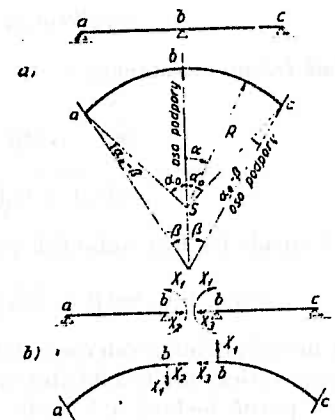
$$\bar{T}_1(\alpha) = -\frac{\cos \beta}{2R \sin \frac{\alpha_0}{2} \cos \left(\beta - \frac{\alpha_0}{2} \right)},$$

$$\bar{M}_2(\alpha) = [R \bar{T}_3(0) - 1] \sin \alpha,$$

$$\bar{K}_2(\alpha) = \cos \alpha + \bar{T}_3(0) R (1 - \cos \alpha),$$

$$\bar{T}_2(\alpha) = \frac{\sin \beta}{2R \sin \frac{\alpha_0}{2} \cos \left(\beta - \frac{\alpha_0}{2} \right)}.$$

Ohybové čáry $\tilde{w}_i(\alpha), \tilde{\psi}_i(\alpha)$ prutů ab, bc nechť byly vypočteny za předpokladu vetknutí ve střední podpoře b ($\alpha = 0$). Pootočení φ_0, ψ_0 značí pootočení ve střední podpoře b , a to φ_0, ψ_0 pro prut ab a φ_0, ψ_0 pro prut bc . V poli ab je α záporné. Podpoře a odpovídá $\alpha = -\alpha_0$.



Obr. 5. Spojitý nosník o dvou polích — souměrný (typ A), a) statický systém, b) základní soustava a staticky neurčité veličiny.

Рис. 5. Двухпролетная, неразрезная, симметричная балка (тип А), а) статическая система, б) основная система и статически неопределимые величины.

Fig. 5. Symmetric two-span continuous beam (Type A), a) static system, b) primary system and statically indeterminate forces.

O příčinkové čáře $\eta_{X_1}(\alpha)$ a $\zeta_{X_1}(\alpha)$ veličiny X_1 je možno vzhledem k symetrii nosníku i staticky neurčité X_1 předem říci, že musí být symetrická podle střední podpory b .

Z podmínky deformace velikosti -1 ve smyslu X_1 pak přímo plyne $\varphi_{0c} = -\varphi_{0a} = \frac{1}{2}$.

Podpěření v bodě b dále určuje $\psi_{0c} = \psi_{0a} = 0$ ($w_0 = 0$). Z podmínky nulového průhybu v krajní podpoře c podle rov. (5a) plyne: $-\frac{1}{2}R \sin \alpha_0 + k\tilde{w}_1(\alpha_0) = 0$, což skýtá

$$k = \frac{R \sin \alpha_0}{2\tilde{w}_1(\alpha_0)} \quad (8)$$

Za kontrolu může sloužit podmínka nulového pootočení ve svislé rovině proložené osou kloubové podpory c : $\frac{1}{2} \sin \beta + k\tilde{\varphi}_{1c}(\alpha_0) = 0$.

Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_2}(\alpha)$, $\zeta_{X_2}(\alpha)$ veličiny X_2 , k níž je též souměrná příčinková čára veličiny X_2 , platí zřejmě $\varphi_{0a} = \varphi_{0c} = \varphi_0$, $\psi_{0a} = 0$, $\psi_{0c} = 1$. Z podporových výmink $\eta_{X_2}(-\alpha_0) = 0$ v bodě a , $\eta_{X_2}(\alpha_0) = 0$ v bodě c vyplývá podle rovnice (5a) soustava dvou rovnic pro k a φ_0 ($w_0 = 0$):

$$\begin{aligned} -\varphi_0 R \sin(-\alpha_0) + k\tilde{w}_2(-\alpha_0) &= 0, \\ -\varphi_0 R \sin \alpha_0 + R(1 - \cos \alpha_0) + k\tilde{w}_2(\alpha_0) &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením dostaneme:

$$\varphi_0 = \frac{\tilde{w}_2(-\alpha_0) \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{\tilde{w}_2(\alpha_0) + \tilde{w}_2(-\alpha_0)}, \quad k = -\frac{R(1 - \cos \alpha_0)}{\tilde{w}_2(\alpha_0) + \tilde{w}_2(-\alpha_0)} \quad (9)$$

Ke kontrole lze užít nulových pootočení v bodech c , a :

$$\cos \beta + \varphi_0 \sin \beta + k\tilde{\varphi}_{2c}(\alpha_0) = 0, \quad -\varphi_0 \sin \beta + k\tilde{\varphi}_{2a}(-\alpha_0) = 0.$$

K určení příčinkových čar vnitřních sil v poli je zapotřebí znát ještě jejich příčinkové čáry na staticky určené základní soustavě, tj. na prostém nosníku bc , podpěřeném v bodě $\alpha = 0$ pevně bodově a v bodě $\alpha = \alpha_0$ posuvnou kloubovou podporou ve směru β (obr. 5c). Z momentové výminky rovnováhy pole k ose kloubové podpory c lze odvodit příčinkové čáry vnitřních sil v bodě $\alpha = \alpha_r$ pro pohyblivé zatížení svislým jednotkovým břemenem v bodě α

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_M(\alpha) &= \begin{cases} B_\eta R \sin \alpha & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \\ B_\eta R \sin \alpha - R \sin(\alpha - \alpha_r) & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \end{cases} \\ \bar{\eta}_K(\alpha) &= \begin{cases} B_\eta R(1 - \cos \alpha) & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \\ B_\eta R(1 - \cos \alpha) - R[1 - \cos(\alpha - \alpha_r)] & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \end{cases} \quad (10a) \\ \bar{\eta}_T(\alpha) &= \begin{cases} B_\eta & \text{pro } \alpha < \alpha_r, \\ 1 - B_\eta & \text{pro } \alpha > \alpha_r, \end{cases} \end{aligned}$$

a příčinkové čáry pro zatížení jednotkovým příčným momentem

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_M(\alpha) &= \begin{cases} B_\zeta R \sin \alpha & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \\ B_\zeta R \sin \alpha + \sin(\alpha - \alpha_r) & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \end{cases} \\ \bar{\zeta}_K(\alpha) &= \begin{cases} B_\zeta R(1 - \cos \alpha) & \text{pro } \alpha < \alpha_r, \\ B_\zeta R(1 - \cos \alpha) - \cos(\alpha - \alpha_r) & \text{pro } \alpha > \alpha_r, \end{cases} \quad (10b) \\ \bar{\eta}_T(\alpha) &= B_\eta. \end{aligned}$$

Zde značí

$$\begin{aligned} B_\eta &= \frac{\sin \frac{\alpha_0 - \alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha_0 + \alpha}{2} - \beta \right)}{\sin \frac{\alpha_0}{2} \cos \left(\frac{\alpha_0}{2} - \beta \right)}, \\ B_\zeta &= -\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha)}{2R \sin \frac{\alpha_0}{2} \cos \left(\frac{\alpha_0}{2} - \beta \right)}. \end{aligned}$$

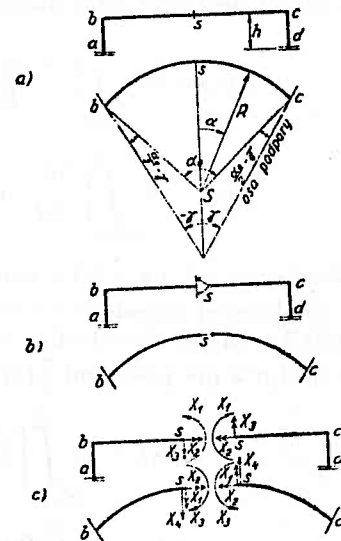
B. Dvoukloubový rám. Rám $abcd$ má v patkách a , d pevné kloubové podpory svírající s normálou ve středu s pole, kde zvolíme počátek $\alpha = 0$ měření středového úhlu α , úhly $\pm \gamma$ [obr. 6a]. Středový úhel pole je α_0 . Případ kolmých podpor a , d nastává pro $\gamma = \frac{\alpha_0}{2}$. Nosník nechť je i v tuhostech průřezů

souměrný podle normálové roviny v bodě s .

Uvedený rám je prostorově 4-krát staticky neurčitý. Za základní staticky určenou soustavu zvolíme trojkloubový rám s příčně posuvnou bodovou vazbou v bodě s , který vznikne uvolněním čtyř staticky neurčitých vazeb v průřezu s uprostřed pole, a to svislého a vodorovného ohybového momentu X_1 a X_2 , krouticího momentu X_3 a vodorovné posouvající síly X_4 , přičemž však průřez s nadále přenáší normálovou sílu a svislou posouvající sílu.

Hodnoty vnitřních sil zakřiveného nosníku základní soustavy v bodě x , od zatížení $\bar{X}_i = 1$ vyplývající z momentových výmink rovnováhy k ose kloubu podpory d :

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(\alpha) &= \cos \alpha, & \bar{K}_1(\alpha) &= \sin \alpha, & \bar{D}_1(\alpha) &= \frac{R}{h} (1 - \cos \alpha), \\ \bar{T}_1(\alpha) &\equiv 0, & \bar{H}_1(\alpha) &= -\sin \alpha, & \bar{N}_1(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{h}, \\ \bar{M}_2(\alpha) &= [R \bar{T}_2(0) - 1] \sin \alpha, & \bar{K}_2(\alpha) &= \cos \alpha + R \bar{T}_2(0) (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$



Obr. 6. Dvoukloubový rám (1 B), a) statický systém, b) základní soustava, c) staticky neurčitelné veličiny.

Рис. 6. Двухшарнирный ра́м (тип В), а) статическая система, б) основная система, в) статически неопределимые величины.

Fig. 6. Symmetric two-hinged frame (Type B), a) static system, b) primary system, c) statically indeterminate forces.

$$\bar{T}_2(\alpha) \equiv \frac{\sin \gamma}{2R \sin \frac{\alpha_0}{4} \cos \left(\gamma - \frac{\alpha_0}{4} \right)}, \quad \bar{D}_2(\alpha) = \bar{Q}_2(\alpha) = \bar{N}_2(\alpha) \equiv 0,$$

$$\bar{M}_3(\alpha) = \bar{K}_3(\alpha) \equiv \bar{T}_3(\alpha) = \bar{Q}_3(\alpha) = \bar{N}_3(\alpha) \equiv 0, \quad \bar{D}_3(\alpha) = 1, \quad (11)$$

$$\bar{M}_4(\alpha) = R \bar{T}_4(0) \sin \alpha, \quad \bar{K}_4(\alpha) = R \bar{T}_4(0) (1 - \cos \alpha),$$

$$\bar{D}_4(\alpha) = -R \sin \alpha.$$

Po dosazení $\alpha = \pm \frac{\alpha_0}{2}$ lze odtud též snadno určit hodnoty vnitřních sil ve stojkách rámu.

Po určení hodnot $M^{(i)}, K^{(i)}, \dots$ se vypočtou čáry $\tilde{w}_i(\alpha), \tilde{\psi}_i(\alpha)$ pro zakřivený prut se za předpokladu vetknutí v bodě s ($\alpha = 0$). Pro stanovení příčinkových čar je zapotřebí určit hodnoty φ_0, ψ_0, w_0 , v bodě s .

Kloubové podepření v bodě d skýtá 5 podporových výminek. Jsou to: a) Nulové pootočení ve svislé rovině proložené osou podporového kloubu d . b) Nulové vodorovné pootočení v bodě d . c) Nulový svislý průhyb v bodě d . d) Nulový vodorovný posun v bodě d ve směru spojnice podpor ad a e) kolmo na ni (příp. v libovolném jiném směru).

Jelikož uvažovaný rám je symetrický podle normálové roviny ve středu pole s a stejně i staticky neurčitě veličiny X_1 a X_3 , budou podle této roviny symetrické i jejich příčinkové čáry. Příčinkové čáry staticky neurčitých veličin X_2, X_4 musí být antisymetrické podle bodu s , poněvadž samy veličiny X_2, X_4 jsou podle bodu s antisymetrické.

Označme deformace v patě d rámu odpovídající vnitřním silám $M^{(i)}, K^{(i)}, \dots$, způsobené přetvořením zakřiveného nosníku sc vetknutého v bodě s takto: $\tilde{\varphi}_{i_d} = \tilde{\varphi}_i \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)$, resp. $\tilde{\chi}_{i_d} = \tilde{\chi}_i \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) \dots$ pootočení v patě d stojky rámu ve svislé rovině proložené osou podporového kloubu, resp. pootočení v patě d ve vodorovné rovině, $\tilde{u}_{i_{ad}}$, resp. $\tilde{v}_{i_{ad}} \dots$ vodorovný posun v patě d stojky ve směru spojnice ad , resp. kolmo na ni — a deformace způsobené přetvořením přímé spojky cd , vetknuté v bodě d , takto: $\tilde{\varphi}'_{i_d}$, resp. $\tilde{\chi}'_{i_d} \dots$ pootočení v patě d stojky ve svislé rovině, proložené osou podporového kloubu, resp. pootočení v patě d ve vodorovné rovině, $\tilde{u}'_{i_{ad}}$, resp. $\tilde{v}'_{i_{ad}} \dots$ posun paty d ve směru spojnice ad , resp. kolmo na ni. Snadno lze odvodit:

$$\tilde{u}_{i_{ad}} = -2R^2 \int_{\alpha=0}^{\alpha_0/2} \frac{D^{(i)}}{EI} \sin \left(\frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha +$$

$$+ R \int_{\alpha=0}^{\alpha_0/2} \left(\frac{M^{(i)}h}{EJ} \cos \alpha + \frac{K^{(i)}h'}{GJ_k} \sin \alpha \right) d\alpha, \quad (12)$$

$$\tilde{v}_{i_{ad}} = 2R^2 \int_{\alpha=0}^{\alpha_0/2} \frac{D^{(i)}}{EI} \sin \left(\frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha +$$

$$+ R \int_{\alpha=0}^{\alpha_0/2} \left(\frac{M^{(i)}h}{EJ} \sin \alpha - \frac{K^{(i)}h'}{GJ_k} \cos \alpha \right) d\alpha,$$

kde $h = h(\alpha)$ značí výšku těžišť průřezů křivého nosníku ad nad patou d stojky a $h' = h'(\alpha)$ výšku smykových středů průřezů křivého nosníku sc nad patou d stojky. U nosníků stálého průřezu jsou h a h' konstantní.

Příčinková čára $\eta_{X_1}(\alpha), \zeta_{X_1}(\alpha)$ svislého ohybového momentu X_1 musí mít podle podmínky deformace velikosti -1 ve smyslu X_1 vzhledem k symetrii nosníku $\varphi_0 = \frac{1}{2}$.

Dále je $\chi_0 = 0$. Z podmínek d), a), c) po řadě plyne:

$$k = -\frac{h}{2(\tilde{u}_{1_{ad}} + \tilde{u}'_{1_{ad}})}, \quad \psi_0 = -\frac{k}{\cos \gamma} (\tilde{\varphi}_{1_d} + \tilde{\varphi}'_{1_d}), \quad (13)$$

$$w_0 = \frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha_0}{2} - \psi_0 R \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) - k \tilde{w}_1 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right).$$

Za kontrolu může sloužit podmínka b), jež zní:

$$\tilde{\chi}_{1_d} + \tilde{\chi}'_{1_d} = 0.$$

Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_2}(\alpha), \zeta_{X_2}(\alpha)$ kroutícího momentu X_2 vzhledem k antisymetrii platí $\psi_0 = \frac{1}{2}, w_0 = 0$. Podmínky c), a) dávají po řadě rovnice

$$-\varphi_0 R \sin \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} R \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) + k w_2 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\varphi_0 \sin \gamma + \frac{1}{2} \cos \gamma + k(\tilde{\varphi}_{2_d} + \tilde{\varphi}'_{2_d}) = 0,$$

jejichž řešením se získá φ_0 a k . Ke kontrole lze užít podmínek d), e), jež po dosazení z podmínky b) zní:

$$\varphi_0 h + k \left[\tilde{u}_{2_{ad}} + \tilde{u}'_{2_{ad}} + (\tilde{\chi}_{2_d} + \tilde{\chi}'_{2_d}) R \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) \right] = 0,$$

$$-\frac{h'}{2} + k \left[\tilde{v}_{2_{ad}} + \tilde{v}'_{2_{ad}} - (\tilde{\chi}_{2_d} + \tilde{\chi}'_{2_d}) R \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] = 0.$$

O příčinkové čáře $\eta_{X_3}(\alpha), \zeta_{X_3}(\alpha)$ vodorovného ohybového momentu X_3 vzhledem k symetrii platí $\varphi_0 = 0, \chi_0 = \frac{1}{2}$. Z podmínek b), a), c) po řadě plyne:

$$k = -\frac{1}{2(\tilde{\chi}_{3_d} + \tilde{\chi}'_{3_d})}, \quad \psi_0 = -\frac{k}{\cos \gamma} (\tilde{\varphi}_{3_d} + \tilde{\varphi}'_{3_d}), \quad (15)$$

$$w_0 = -\psi_0 R \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) - k \tilde{w}_3 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right).$$

Pro kontrolu lze z podmínky d) vypočíst $k = \frac{1}{2} R \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) / (\tilde{u}_{3_{ad}} + \tilde{u}'_{3_{ad}})$.

O příčinkové čáře $\eta_{X_4}(\alpha), \zeta_{X_4}(\alpha)$ vodorovné posouvající síly X_4 podle antisymetrie $w_0 = 0, \psi_0 = 0, v_0 = \frac{1}{2}$. Podmínky c), e) skýtají po řadě rovnice:

$$\varphi_0 = k \frac{\tilde{w}_1 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)}{R \sin \frac{\alpha_0}{2}}, \quad (16)$$

$$k = \frac{-1}{2 \left[\tilde{v}_{1a} + \tilde{v}'_{1a} - (\tilde{\chi}_{1a} + \tilde{\chi}'_{1a}) R \sin \frac{\alpha_0}{2} \right]}$$

Kontrolu je možno provést podle podmínek a) a d), jež po dosazení z podmínky b) zní:

$$\varphi_0 \sin \gamma + k(\tilde{\varphi}_{1a} + \tilde{\varphi}'_{1a}) = 0,$$

$$\varphi_0 h + k \left[\tilde{u}_{1aa} + \tilde{u}'_{1aa} + (\tilde{\chi}_{1a} + \tilde{\chi}'_{1a}) R \left(1 - \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) \right] = 0.$$

Příčinkové čáry vnitřních sil v bodě $\alpha = \alpha_r$ na základní staticky určité soustavě se získají z momentových výminek rovnováhy k osám kloubových podpor. Pro pohyblivé zatížení svislým jednotkovým břemenem v bodě x je:

$$\bar{\eta}_M(x) = \begin{cases} T_\eta R \sin \alpha & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \\ T_\eta R \sin \alpha - R \sin(\alpha - \alpha_r) & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_K(x) = \begin{cases} T_\eta R(1 - \cos \alpha) & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \\ T_\eta R(1 - \cos \alpha) - R[1 - \cos(\alpha - \alpha_r)] & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_D(x) = N_\eta R(1 - \cos \alpha)$$

$$\bar{\eta}_T(x) = \begin{cases} T_\eta & \text{pro } \alpha < \alpha_r, \\ T_\eta - 1 & \text{pro } \alpha > \alpha_r. \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_Q(x) = -N_\eta \sin \alpha, \quad \bar{\eta}_N(x) = N_\eta \cos \alpha,$$

kde značí

$$T_\eta = \frac{\sin \left(\frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\gamma - \frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha_0}{4} \cos \left(\gamma - \frac{\alpha_0}{4} \right)},$$

$$N_\eta = \frac{R \sin \left(\frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\gamma - \frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{h \cos \left(\gamma - \frac{\alpha_0}{4} \right)}$$

a pro pohyblivé zatížení příčným jednotkovým kroutícím momentem v bodě x je:

$$\zeta_M(x) = \begin{cases} T_\zeta R \sin \alpha & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \\ T_\zeta R \sin \alpha - \sin(\alpha - \alpha_r) & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \end{cases}$$

$$\zeta_K(x) = \begin{cases} T_\zeta R(1 - \cos \alpha) & \text{pro } \alpha < \alpha_r, \\ T_\zeta R(1 - \cos \alpha) - R \cos(\alpha - \alpha_r) & \text{pro } \alpha > \alpha_r, \end{cases} \quad (18)$$

$$\zeta_D(x) = N_\zeta R(1 - \cos \alpha), \quad \zeta_T(x) = T_\zeta, \quad \zeta_Q(x) = -N_\zeta \sin \alpha,$$

$$\zeta_N(x) = N_\zeta \cos \alpha,$$

kde značí

$$T_\zeta = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{4R \sin \frac{\alpha_0}{4} \cos \left(\gamma - \frac{\alpha_0}{4} \right)},$$

$$N_\zeta = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{2h \cos \gamma}.$$

V obecnějším případě rámu, jenž je geometricky podepřením nebo v tuhostech *nesouměrný*, je vhodnější zavést základní soustavu, jež vznikne z daného systému uvolněním jednoho podporového kloubu na bodovou kyvnou podporu, čímž jako staticky neurčitě v této podpoře vystoupí vodorovná síla rámu, příčný moment kloubu, vodorovný moment a vodorovná síla kolmá na spojnici podpor. Po určení ohybových čar za předpokladu vetknutí ve druhé podpoře stačí k určení k , φ_0 pouze dvě podporové podmínky, z nichž jedna je nulový průhyb v první podpoře a druhá je deformace velikosti -1 ve smyslu příslušné staticky neurčitě.

C. *Nosník o jednom poli kloubově podepřený*. Nosník ab o středovém úhlu pole α_0 nechť má v bodě a , resp. b kloubovou podporu pevnou, resp. posuvnou, odkloněnou od tečny o úhel ε_a , resp. ε_b (obr. 7a). Osy podpor nechť nesplývají. Středový úhel α se měří od podpory a .

Daný nosník je prostorově 2-krát staticky neurčitý, avšak pro svislé zatížení, pro nějž zřejmě nevznikají žádné vodorovné síly, je pouze 1-krát staticky neurčitý. Základní soustavu vytvoříme uvolněním podpory b na bodovou kyvnou, k čemuž stačí pro svislé zatížení uvolnit příčný moment X_1 této podpory [obr. 7b)].

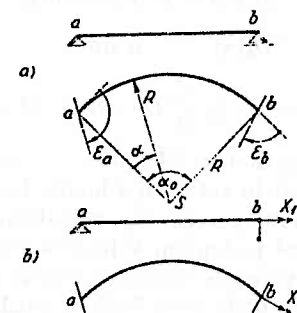
Z momentové výminek rovnováhy k ose podpory a lze určit vnitřní síly \bar{M}_1 , \bar{K}_1 , \bar{T}_1 v bodě x na základní soustavě od zatížení $\bar{X}_1 = 1$:

$$\bar{M}_1(x) = -\bar{T}_1(x_0) R \sin(\alpha_0 - \alpha) - \cos(\varepsilon_b + \alpha),$$

$$\bar{K}_1(x) = \bar{T}_1(x_0) R[1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)] + \sin(\varepsilon_b + \alpha), \quad (19)$$

$$\bar{T}_1(x) = \frac{\sin(\alpha_0 + \varepsilon_b - \varepsilon_a)}{2R \sin \frac{\alpha_0}{2} \sin \left(\varepsilon_b + \frac{\alpha_0}{2} \right)}$$

Ohybové čáry $\tilde{w}_1(x)$, $\tilde{\varphi}_1(x)$ nechť byly vypočteny za předpokladu vetknutí v pod-



Obr. 7. Nosník o jednom poli kloubově podepřený (typ C), a) statický systém, b) základní soustava a staticky neurčité veličiny.

Рис. 7. Однопролетная балка с шарнирными опорами (тип С), а) статическая система, б) основная система и статически неопределимые величины.

Fig. 7. One span beam with hinged supports (Type C), a) statical system, b) primary system and statically indeterminate forces.

poře a ($\alpha = 0$). Příčinková čára $\eta_{X_1}(\alpha)$, $\zeta_{X_1}(\alpha)$ musí v bodě a splňovat podmínku nulového pootočení napříč kloubové podpory a , tj. $-\varphi_0 \cos \varepsilon_a + \psi_0 \sin \varepsilon_a = 0$, odkud plyne $\psi_0 = \varphi_0 \cotg \varepsilon_a$. Podmínka pootočení velikosti -1 ve smyslu X_1 v bodě b ($\alpha = \alpha_0$) a podmínka nulového průhybu v bodě b dávají rovnice:

$$\begin{aligned} \varphi_0 R [(1 - \cos \alpha_0) \cotg \varepsilon_a - \sin \alpha_0] + k \tilde{w}_1(\alpha_0) &= 0, \\ \varphi_0 [\sin(\alpha_0 + \varepsilon_b) \cotg \varepsilon_a - \cos(\alpha_0 + \varepsilon_b)] + k \tilde{\varphi}_{1,1}(\alpha_0) &= -1, \end{aligned} \quad (20)$$

z nichž se vypočte φ_0 a k .

Příčinkové čáry vnitřních sil v bodě $\alpha = \alpha_r$ staticky určité základní soustavy pro pohyblivé zatížení svislým jednotkovým břemenem v bodě α jsou:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_M(\alpha) &= \begin{cases} -\bar{\eta}_I(\alpha) R \sin(\alpha_0 - \alpha) & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \\ -\bar{\eta}_I(\alpha) R \sin(\alpha_0 - \alpha) - R \sin(\alpha_r - \alpha) & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \end{cases} \\ \bar{\eta}_K(\alpha) &= \begin{cases} \bar{\eta}_I(\alpha) R [1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)] & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \\ \bar{\eta}_I(\alpha) R [1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)] + R [1 - \cos(\alpha_r - \alpha)] & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\bar{\eta}_I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha_0}{2} \sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha_0}{2} \right)} & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \\ \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha_0}{2} \sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha_0}{2} \right)} + 1 & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r \end{cases}$$

a pro zatížení jednotkovým příčinným momentem v bodě α jsou

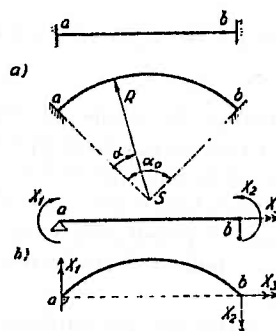
$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_M(\alpha) &= \begin{cases} -\bar{\zeta}_T(\alpha) R \sin(\alpha_0 - \alpha) & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \\ -\bar{\zeta}_T(\alpha) R \sin(\alpha_0 - \alpha) - R \sin(\alpha_r - \alpha) & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \end{cases} \\ \bar{\zeta}_K(\alpha) &= \begin{cases} \bar{\zeta}_T(\alpha) R [1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)] & \text{pro } \alpha \geq \alpha_r, \\ \bar{\zeta}_T(\alpha) R [1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)] + R [1 - \cos(\alpha_r - \alpha)] & \text{pro } \alpha \leq \alpha_r, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{\zeta}_T(\alpha) = \frac{\cos(\varepsilon_a - \alpha)}{2R \sin \frac{\alpha_0}{2} \sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha_0}{2} \right)}$$

D. *Oboustranně vetknutý nosník*. Středový úhel pole nosníku ab je α_0 . Úhel α se měří od podpory a [obr. 8a]. Jeho prostorová statická neurčitost je 6 násobná, avšak pro svislé zatížení, které nevyvoluje vodorovné deformace, pouze 3 násobná. Základní soustavu uvažujeme jako nosník s pevnou kloubovou podporou v bodě a , kolmou na tětivu ab , s hodovou kyvnou podporou v bodě b . Soustavu je pak nutno doplnit staticky neurčitými momenty X_1 , X_2 a X_3 [obr. 8b].

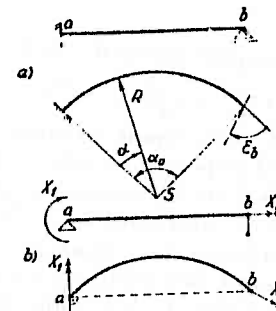
Vnitřní síly základní soustavy pro zatížení $\bar{X}_i = 1$ lze získat podle předchozího příkladu dosazením $\varepsilon_a = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{2}$ do rovnic (19) a obdobně též příčinkové čáry dosazením do rovnic (21), (22).

Nechť ohybové čáry $\tilde{w}_i(\alpha)$, $\tilde{\varphi}_i(\alpha)$ byly vypočteny za předpokladu vetknutí v bodě a



Obr. 8. Nosník vetknutý (typ D), a) statický systém, b) základní soustava a staticky neurčité veličiny.

Рис. 8. Заданная балка (тип D), а) статическая система, б) основная система и статически неопределимые величины.
Fig. 8. Fixed-end beam (Type D), a) statical system, b) primary system and statically indeterminate forces.



Obr. 9. Nosník jednostranně vetknutý (typ E), a) statický systém, b) základní soustava a staticky neurčité veličiny.

Рис. 9. Балка заданная одним концом (тип E), а) статическая система, б) основная система и статически неопределимые величины.

Fig. 9. Beam with fixed end on one side (Type E), a) statical system, b) primary system and statically indeterminate forces.

($\alpha = 0$). Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_1}(\alpha)$, $\zeta_{X_1}(\alpha)$ veličiny X_1 vyplývá z podmínky pootočení velikosti -1 ve smyslu X_1 : $\varphi_0 = -\cos \frac{\alpha_0}{2}$, $\psi_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $w_0 = 0$. Podmínka nulového průhybu v bodě b přímo skýtá:

$$k = -\frac{2R}{w_1(\alpha_0)} \sin \frac{\alpha_0}{2}. \quad (23)$$

Kontrolou jsou podmínky nulového pootočení v bodě b ve smyslu X_2 a ve smyslu X_3 , jež po řadě zní:

$$-\cos \frac{\alpha_0}{2} + k \tilde{\varphi}_{1,1} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{2} \right) (\alpha_0) = 0, \quad -\sin \frac{\alpha_0}{2} + k \tilde{\varphi}_{1,2} \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) (\alpha_0) = 0.$$

Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_1}(\alpha)$, $\zeta_{X_1}(\alpha)$ platí obdobné vztahy. Je-li nosník i co do tuhosti souměrný podle normálové roviny v bodě $\alpha = \frac{\alpha_0}{2}$, je tato čára souměrná k čáře $\eta_{X_1}(\alpha)$.

$\zeta_{X_1}(\alpha)$ podle této roviny.

Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_2}(\alpha)$, $\zeta_{X_2}(\alpha)$ veličiny X_2 vyplývá z podmínky pootočení

velikosti -1 ve smyslu X_2 ($\varphi_0 = \psi_0 = w_0 = 0$):

$$k = -\frac{1}{\tilde{\varphi}_2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)(\alpha_0)} \quad (24)$$

Kontrolu poskytují podmínky nulového pootočení v bodě b ve smyslu X_2 a nulového průhybu b : $\tilde{\varphi}_2\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right)(\alpha_0) = 0$, $\tilde{w}_2(\alpha_0) = 0$.

E. *Nosník jednostranně vetknutý.* Nosník ab má středový úhel pole α_0 . Středový úhel α se měří od podpory a [obr. 9a)]. Nosník je v bodě a vetknutý, v bodě b podepřený posuvnou kloubovou podporou, jejíž osa je odkloněná od tečny v bodě b o úhel ε_n . Daný nosník je prostorově 3-krát staticky neurčitý a pro toliko svislé zatížení pouze 2-krát. Základní soustavu uvažujeme jako nosník s bodovou kyvnou podporou v bodě b a s kloubovou pevnou podporou o ose kolmé na tětívu ab v bodě a . Staticky neurčitými pak jsou momenty X_1 a X_2 [obr. 9b)].

Vzhledem ke shodnosti základní soustavy jsou její vnitřní síly pro zatížení $\bar{X}_i = 1$ dány rovnicemi (19) a příčinkové čáry rovnicemi (21), (22). Ohybové čáry $w_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ nechť byly vypočteny za předpokladu vetknutí v bodě a ($x = 0$). Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_1}(\alpha)$, $\zeta_{X_1}(\alpha)$ veličiny X_1 platí obdobně jako v předešlém pří-

kladě $\varphi_0 = -\cos \frac{\alpha_0}{2}$, $\psi_0 = \sin \frac{\alpha_0}{2}$, $w_0 = 0$, k podle rovnice (23). Kontrolou je podmínka nulového pootočení ve smyslu X_2 , jež zní:

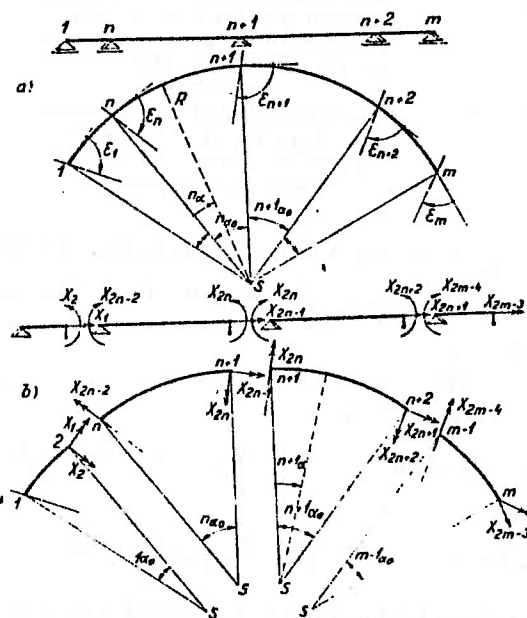
$$\begin{aligned} & \cos \frac{\alpha_0}{2} \cos(\varepsilon_n + \alpha_0) + \\ & + \sin \frac{\alpha_0}{2} \sin(\varepsilon_n + \alpha_0) + \\ & + k \tilde{\varphi}_2\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right)(\alpha_0) = 0. \end{aligned}$$

Pro příčinkovou čáru $\eta_{X_2}(\alpha)$, $\zeta_{X_2}(\alpha)$ veličiny X_2 platí $\varphi_0 = \psi_0 = w_0 = 0$. Z podmínky pootočení velikosti -1 ve smyslu X_2 plyne

$$k = -\frac{1}{\tilde{\varphi}_2\left(\varepsilon_n + \alpha_0 - \frac{\pi}{2}\right)(\alpha_0)} \quad (25)$$

Kontrolou je nulový průhyb v bodě b : $\tilde{w}_2(\alpha_0) = 0$.

F. *Spojitý nosník o více polích.* Spojitý nosník má obecně šikmo položené podpory 1, ...,



Obr. 10. Spojitý nosník o více polích (typ F), a) statický systém, b) základní soustava a staticky neurčité veličiny.

Рис. 10. Перезрезная многопролетная балка (тип F), а) статическая система, б) основная система и статически неопределимые величины.

Fig. 10. Multi-span continuous beam (Type F), a) statical system, b) primary system and statically indeterminate forces.

$n-1, n, n+1, \dots, m$, odkloněné od tečen oblouku o úhly $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_m$ [obr. 10a)]. Středový úhel pole $(n, n+1)$ nechť je ${}^n\alpha_0$. Jsou-li až na jednu všechny podpory posuvné, je při m podporách nosník prostorově $(3m-4)$ krát staticky neurčitý. Za svislého zatížení, kdy nevznikají vodorovné deformace, je jen $(2m-3)$ krát staticky neurčitý. Základní soustavu vytvoříme rozdělením deformací nosníku na soustavu staticky určitých nosníků zatížených staticky neurčitými ohybovými momenty $X_2, \dots, X_{2n}, \dots, X_{2m-1}$ v osách podporových kloubů 2, ..., $m-1$ a krouticími momenty $X_1, \dots, X_{2n-1}, \dots, X_{2m-2}$ působícími napříč podporových kloubů těsně před podporami [obr. 10b)].

V jednotlivých polích $(n, n+1)$ jsou vzhledem ke shodnosti základní soustavy vnitřní síly od zatížení $\bar{X}_i = 1$ dány rovnicemi (19) a příčinkové čáry rovnicemi (21), (22), kde úhel ${}^n\alpha$ se měří vždy zvlášť od podpory n . Pro každé pole $(n, n+1)$ se vypočtou ohybové čáry $\tilde{w}_i(\alpha)$, $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ za předpokladu vetknutí v bodě n a pro každou podporu n je nutno zvlášť určit hodnotu ${}^n\varphi_0$ pro pole $(n, n+1)$, přičemž je ${}^n\psi_0 = {}^n\varphi_0 \cotg \varepsilon_n$. Hodnota k je pro danou příčinkovou čáru společná pro všechna pole.

Při určení příčinkové čáry $\eta_{X_{2n}}(\alpha)$, $\zeta_{X_{2n}}(\alpha)$ momentu X_{2n} je nutno vyjít z dvojice polí $(n, n+1)$, $(n+1, n+2)$. Deformace velikosti -1 ve smyslu X_{2n} vyžaduje, aby

$$\begin{aligned} & {}^n\varphi_0 \left[\sin({}^n\alpha_0 + \varepsilon_{n+1}) + \frac{\cos({}^n\alpha_0 + \varepsilon_{n+1})}{\sin \varepsilon_{n+1}} \right] - \frac{{}^{n+1}\varphi_0}{\sin \varepsilon_{n+1}} + \\ & + k \tilde{\varphi}_{2n}\left(\varepsilon_{n+1} + \frac{\pi}{2}\right)({}^n\alpha_0) = -1. \end{aligned} \quad (26)$$

Z podmínky nulového průhybu v bodech $n+1$, resp. $n+2$ pro pole $(n, n+1)$, resp. $(n+1, n+2)$ přímo plyne:

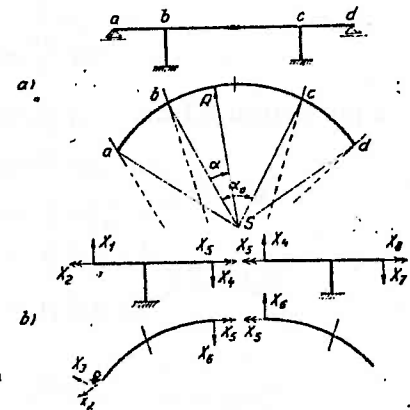
$$\begin{aligned} & {}^n\varphi_0 = \frac{\tilde{w}_{2n}({}^n\alpha_0)}{R \left(\frac{1 - \cos {}^n\alpha_0}{\sin \varepsilon_n} - \sin {}^n\alpha_0 \right)} k, \\ & {}^{n+1}\varphi_0 = \frac{\tilde{w}_{2n}({}^{n+1}\alpha_0)}{R \left(\frac{1 - \cos {}^n\alpha_0}{\sin \varepsilon_{n+1}} - \sin {}^{n+1}\alpha_0 \right)} k. \end{aligned} \quad (27)$$

Dosažením těchto vztahů do rovnice (26) plyne přímo hodnota k a podle (27) též ${}^n\varphi_0$, ${}^{n+1}\varphi_0$. Příčinková čára v ostatních polích se určí podle vzorce (27) pro ${}^n\varphi_0$, kde index n zaměníme za index příslušného pole.

Při určení příčinkové čáry $\eta_{X_{2n-1}}(\alpha)$, $\zeta_{X_{2n-1}}(\alpha)$ krouticího momentu X_{2n-1} je nutno vyjít z pole $(n, n+1)$. Deformace velikosti -1 ve smyslu X_{2n-1} vyžaduje, aby

$$\begin{aligned} & {}^n\varphi_0 \left[\frac{\sin({}^n\alpha_0 + \varepsilon_{n+1})}{\sin \varepsilon_n} - \cos({}^n\alpha_0 + \varepsilon_{n+1}) \right] + \\ & + k \tilde{\varphi}_{2n-1}(\varepsilon_{n+1})({}^n\alpha_0) = -1. \end{aligned} \quad (28)$$

Z podmínky nulového průhybu v bodě $n+1$ dostaneme vztah tvaru (27) pro ${}^n\varphi_0$,



Obr. 11. Sdružený rám s vloženým kloubem, a) statický systém, b) základní soustava a staticky neurčité veličiny.

Рис. 11. Многопролетная рама с соединительным шарниром а) статическая система, б) основная система и статически неопределимые величины.

Fig. 11. Multi-span continuous beam with inserted hinge (Type G), a) statical system, b) primary system and statically indeterminate forces.

kde w_{2n} je zaměněno za w_{2n-1} , a jeho dosazením do (28) získáme k . Příčinková čára v ostatních polích se určí opět podle vzorce (27) pro ${}^n\varphi_0$, kde index n zaměníme za index příslušného pole a w_{2n} za w_{2n-1} . Za kontrolu slouží zbývající podmínky stejných pootočení kolem osy kloubu před a za podporou a podmínky nulových pootočení napříč podporových kloubů, které již vypisovat nebudeme.

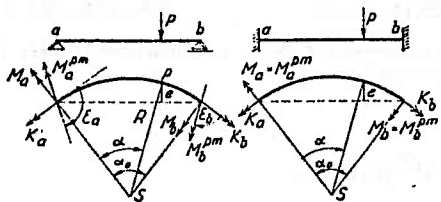
G. Jiné případy. Vetknutý zakřivený rám, který je 6-krát staticky neurčitý, řešíme pomocí základní soustavy získané protnutím nosníku uprostřed pole. Obdobně se řeší sdružený rám, jenž je při n polích $6n$ -krát staticky neurčitý. Konzolový vetknutý rám s vloženým posuvným kloubem v poli, který je 3-krát staticky neurčitý, se řeší pomocí základní soustavy získané uvolněním sil T, K, Q v kloubu a obdobně i sdružený rám s vloženými klouby v polích (obr. 11), který při n polích, z nichž krajní pole končí na operách posuvným kloubem anebo jsou připojená na vetknutou konzolu, je $3n$ -krát staticky neurčitý. U všech těchto rámu jsou ohybové čáry, vypočtené za předpokladu větknutí, přímo úměrné příčinkovým čarám podle koeficientu k ($\varphi_0 = \psi_0 = w_0 = 0$). Trojkloubový rám s pevnými klouby je 3-krát staticky neurčitý.

Přibližné řešení

Pro předběžný návrh konstrukce navrhneme též přibližné řešení.

1. Ohybové momenty, vswlé posouvající síly a normální síly a jejich příčinkové čáry lze přibližně stanovit jako na přímém nosníku nebo rámu, vzniklém rozvinutím zakřiveného nosníku do přímky. Znamená to, že rozpětí polí je nutno uvažovat po oblouku. Takto získané ohybové momenty se uprostřed pole a ve větknutí vztahují k tečné rovině, nad kloubovými podporami však vždy kolmo k ose kloubu, tzn. obecně u šikmé podpory vždy k šikmému řezu. Normální síly rámu působí ve směru spojnice podpor rámu. Z normální síly lze u rámu stanovit přímo vodorovné ohybové momenty. Chyba výsledků bývá jen několik procent [viz porovnání na obr. 14a, b)] a roste se šikmostí podpor vůči normále oblouku.

2. Krouticí momenty lze přibližným výpočtem postihnout jen velmi hrubě. Postup je tento: Pro pole ab musí být splněna momentová výminka rovnováhy pole k těživě ab , která zní (obr. 12):



Obr. 12. Pole nosníku obecně spojitého nebo vetknutého.

Рис. 12. Пролет неразрезной или заделанной балки.

Fig. 12. One span of a continuous and fixed end beam in general.

$$\begin{aligned} & \left(K_a \cos \frac{\alpha_0}{2} + M_a \sin \frac{\alpha_0}{2} \right) + \\ & + \left(-K_b \cos \frac{\alpha_0}{2} + M_b \sin \frac{\alpha_0}{2} \right) + \\ & + Pe = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

kde značí e excentricitu břemene P vůči těživě ab pole, α_0 středový úhel pole a K_a, M_a , resp. K_b, M_b vnitřní síly v podporových průřezích. Podmínky statické ekvivalence dávají v kloubové podpoře

$$\begin{aligned} M_a \sin \varepsilon_a - K_a \cos \varepsilon_a &= M_a^{pm}, \\ M_b \sin \varepsilon_b + K_b \cos \varepsilon_b &= M_b^{pm} \end{aligned} \quad (30)$$

a ve větknutí $M_a = M_a^{pm}$, $M_b = M_b^{pm}$, kde M_a^{pm} resp. M_b^{pm} značí podporový moment na rozvinutém přímém nosníku a ε_a , resp. ε_b úhel osy podpory od tečny.

a) Přibližný výpočet K_a, K_b v poli zatíženém břemenem P založíme na odhad staticky neurčitěho poměru obou závorek v rovnici (29), tj. krouticích momentů k těživě ab . Budeme přibližně uvažovat, že prvá závorčka se rovná $\mu_a Pe$ a druhá závorčka $\mu_b Pe$, kde μ_a , resp. μ_b značí příčinkovou pořadnici, příp. též jen odhadnutou, krouticích momentů K_a , resp. K_b na přímém nosníku ab ($\mu_a - \mu_b = 1$). Potom pro kloubovou podporu plyne:

$$K_a \doteq \frac{\mu_a Pe \sin \varepsilon_a - M_a^{pm} \sin \frac{\alpha_0}{2}}{\sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha_0}{2} \right)},$$

$$M_a \doteq \frac{M_a^{pm} \cos \frac{\alpha_0}{2} - \mu_a Pe \cos \varepsilon_a}{\sin \left(\varepsilon_a - \frac{\alpha_0}{2} \right)},$$

$$K_b \doteq \frac{M_b^{pm} \sin \frac{\alpha_0}{2} + \mu_b Pe \sin \varepsilon_b}{\sin \left(\varepsilon_b + \frac{\alpha_0}{2} \right)},$$

$$M_b \doteq \frac{M_b^{pm} \cos \frac{\alpha_0}{2} - \mu_b Pe \cos \varepsilon_b}{\sin \left(\varepsilon_b + \frac{\alpha_0}{2} \right)},$$

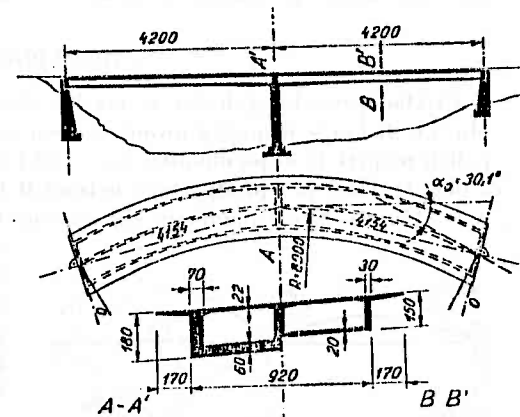
(31)

a pro větknutí

$$K_a \doteq -\frac{\mu_a Pe}{\cos \frac{\alpha_0}{2}} - M_a^{pm} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}, \quad K_b \doteq \frac{\mu_b Pe}{\cos \frac{\alpha_0}{2}} + M_b^{pm} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}.$$

b) V nezatíženém poli spojitěho nosníku je nutno dosadit $Pe \equiv 0$, takže příčinkovy pořadnic μ_a, μ_b tam nelze využít. Platí $K_b \doteq -K_a \doteq \frac{1}{2} TR(1 - \cos \alpha_0) \dots$ (33), kde je posouvající síla pole.

c) Krouticí momenty v poli se určí podle momentů v podpoře z výminek rovnováhy. d) Nejsou-li kloubové podpory rovnoběžné, nebo jsou-li to větknutí, lze v zatíženém i nezatíženém podporový krouticí moment napříč kloubové podpory eliminovat z momentové výminky rovnováhy pole k ose kloubu v druhé podpoře nebo v případě větknutí k normále oblouku v druhé podpoře. Krouticí moment se tak vyjádří pomocí $M_a^{pm}, M_b^{pm}, T_a^{pm}, T_b^{pm}$. Vzhledem k velikosti chyby je však toto řešení použitelné, jen když kloubové podpory, resp. normály oblouku svírají úhel větší asi 15° a i tak dává hodnoty velmi nepřesné, protože v něm vystupují malé rozdíly velkých čísel M_a^{pm}, \dots jen přibližně známých. Proto tento způsob je většinou vhodný jen jako kontrolní.



Obr. 13. Návrh křivého mostu v Kořenově p. Jizeru z předpjatého betonu, statického systému podle obr. 5 (Dopravoprojekt, Praha).

Рис. 13. Проект дугообразного моста на передельно напряженного бетона через Изеру в Корженове, имеющего статическую систему согласно рис. 5 (Доправoprojekt, Прага).

Fig. 13. Curvilinear bridge design. Prestressed bridge over the Jizera River at Kořenov. Statical system according to Fig. 5.

(Design office Dopravoprojekt, Prague).

Chyba ve výpočtu krouticích momentů je velká, až kolem 100% (viz porovnání na obr. 14) a roste se středovým úhlem pole. Naštěstí však krouticí momenty mají při dimenzování jen podružný vliv, takže k volbě rozměrů stačí i tento hrubý obraz.

Příklad příčinkových čar

Příklad příčinkových čar z návrhu silničního mostu v Kořenově přes Jizeru je na obr. 14. Jedná se o spojitý nosník o dvou polích (typ Λ) v poloměru $R = 80$ m, o dvou polích rozpětí 42 m po oblouku ($\alpha_0 = 30,1^\circ$) a šířce mezi zábradlím 13,2 m (viz obr. 13 a obr. 1). Most je z předpjatého betonu B 400, předpjatý kabely v horní a dolní desce a ve stěnách. Svým poměrem šířky nosné komůrky 9,20 m ku rozpětí 42 m (1/4,6) je tento most na mezi, kdy ještě jej přibližně lze zjednodušit na prut. Chyba přibližného řešení M a T , jež v obr. 14 není zakresleno, je zde zvláště malá — méně než 1% max. hodnoty — poněvadž krajní podpory jsou kolmé na těživu polí.

Poznámky k návrhu a dimenzování

Z hlediska dimenzování průřezů se liší mosty zakřivené od přímých hlavně mnohem větší velikostí krouticích momentů a u rámu výskytem vodorovných ohybových momentů, pro něž je tudíž nutno určovat příčinkové čáry. Naproti tomu svislé ohybové momenty a posouvající síly a u rámu vodorovné síly rámu mívají hodnoty blízké hodnotám pro mosty přímé.

U mostů z předpjatého betonu jsou staticky neurčité svislé ohybové momenty a posouvající síly a u rámu vodorovné síly většinou stejného znaménka a málo odlišné velikosti jako u mostů přímých. Navíc přistupují staticky neurčité krouticí momenty od předpětí a u rámu vodorovné ohybové momenty. Jejich znaménka bývají opačná k hodnotám od svislého vnějšího zatížení a velikost mívají zhruba poloviční i více, takže se s nimi z valné části navzájem ruší. Tato velmi výhodná vlastnost předpětí je způsobena tím, že předpětí působí proti stálému zatížení. U zakřivených spojitých nosníků předpětí kabely souměrnými podle svislé osy souměrnosti průřezů nevyvozuje žádné vodorovné ohybové momenty a vodorovné reakce a tlaková síla od předpětí se vlivem radiálních sil klenbově vynáší.

Průřezy zakřivených mostů je nutno vzhledem k velikosti krouticích momentů

navrhovat dostatečně tuhé na kroucení, čemuž nejlépe vyhovují uzavřené komůrkové průřezy. Jejich tuhost je možno ještě zvyšovat příčnými stěnami, rámy a výtubami, což však je pro výrobu nevýhodné. Choulostivě bývá zajištění bezpečnosti proti nadzdvihování z ložisek vlivem krouticích momentů. Tak např. na obr. 13 mají tendenci nadzdvihování ložiska na konci nosníku na vnitřní straně. Někdy lze tomu zabránit bez kotvení a ložiska stejnoměrněji využít, uspořádají-li se ložiska nesouměrně k ose mostu tak, že se natlačí ven z oblouku. V průřezech o malých krouticích momentech, což bývá uprostřed pole, lze někdy pro zjednodušení výroby vynechat dolní desku, čím na určitém úseku vznikne otevřený průřez o značně menší tuhosti v kroucení. Přesný výpočet je však potom mnohem komplikovanější, takže skutečné statické působení je méně jasné.

U nosníků z předpjatého betonu je nutno kabely při vnitřní straně oblouku spolehlivě zakotvit do průřezu ovinutou měkkou výztuží. Obtíže u nich působí značně větší ztráta třením vlivem púdorysného zakřivení kabelů, jež při větších křivostech nedovoluje použít delších průběžných kabelů. Přesto to však často nevede k větší spotřebě oceli, je-li mez únosnosti v ohybu ostřejším kritériem než dovolená namáhání.

Zakřivené mosty jsou staticky úsporným systémem, neboť více využívají pevnosti materiálu tím, že využívají smykových napětí. Průřezy běžných mostů přímých jsou totiž většinou schopny přenést určité kroucení „zadarmo“, tj. bez podstatného zvětšení rozměrů výztuže, takže teprve u mostu zakřiveného dostávají plné využití. Proto také nevyhází nijak větší spotřeba materiálu.

LITERATURA

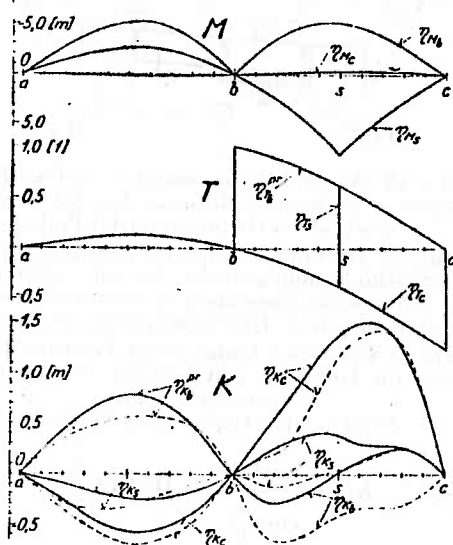
1. Courbon J., Théorie des ponts courbes. Annales des ponts et chaussées, 1961, No. 8, Paříž. Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Praha. Odevzdáno 22. 1. 1963.

Diskusní příspěvky k tomuto článku (v rozsahu nejvíce 2 stran) posílejte trojmo redakci časopisu do 30. 4. 1964, aby bylo možno je uveřejnit v říjnovém čísle.

Зденек П. Бажа́нт

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ МОСТОВ КРИВОЛИНЕЙНЫХ В ПЛАНЕ

В статье указан способ определения линий влияния для мостов имеющих в плане форму дуги, которые можно упрощенно рассматривать как стержневые системы и у которых можно предполагать, что крутящий момент пропорционален относительному углу кручения. Линии влияния: η для случая нагружения единичной, вертикальной, центрической силой и ζ для случая нагружения единичным, поперечным моментом определяются как линии изгиба при деформации в направлении искомого статически неопределимой величины X_1 , равной -1 . Обозначения указаны в рис. 2. Общий способ решения следующий: Выбирается статически определимая основная система и статически неопределимые величины X_1, \dots, X_n и из условий равновесия определяются внутренние силы $\bar{M}_i, \bar{K}_i, \dots$ основной статически определимой системы для случаев нагружения $\bar{X}_i = 1$. Потом согласно (1) определяются коэффициенты гибкости δ_{ij} . Решением системы $n-1$ линейных уравнений (2) находятся значения статически неопределимых $X_i^{(0)}$ для случая нагружения $X_i = X_i^{(0)} = -1$ ($n-1$) раз статически неопределимой системы, которая возникает из данной системы устранением связи X_1 . Значения внутренних сил $M^{(0)}, K^{(0)}, \dots$ соответствующие величинам $X_i^{(0)}$ даны уравнением (3). Для них определяется соответствующая линия изгиба $w_i(x), \psi_i(x)$ дугообразной



Obr. 14. Příčinkové čáry mostu v Kořenově podle obr. 13 pro svislé jednotkové břemeno, a) ohybových momentů, b) posouvajících sil, c) krouticích momentů. Plně — řešení přesné, čárkované — řešení přibližné podle této práce.

Рис. 14. Линии влияния для моста в Коженове согласно рис. 13 для единичной вертикальной нагрузки, а) изгибающего момента, б) срезающей силы, в) крутящего момента. Сплошная линия — точное решение, пунктирная линия — приближенное решение согласно данной работе. Fig. 14. Influence lines of the bridge at Kořenov (according to Fig. 13) for vertical unit load, a) bending moments, b) shearing forces, c) torsional moments. Full lines — exact solution, Dashed lines — approximate solution computed according to this paper.

балки (рис. 2, 3), при чем предполагается, что она заделана в выбранной точке $\alpha = 0$ (в случае необходимости и со значениями $\tilde{\chi}_i(\alpha)$ — рис. 2, $\tilde{\varphi}_{i\beta}(\alpha)$ — угол отклонения в вертикальной плоскости составляющей с нормалью в точке $\alpha = 0$ угол β и другим). Для балки имеющей форму дуги окружности (рис. 3) действительны уравнения (4а, б). Для того, чтобы получить из этой линии изгиба линию влияния $\eta_{xi}(\alpha)$, $\zeta_{xi}(\alpha)$ величины X_i , нужно помножить ее на коэффициент k и повернуть в точке $\alpha = 0$ на углы φ_0 , ψ_0 и сдвинуть на w_0 (рис. 2б), что выражено уравнением (5а, б). Неизвестные значения k , φ_0 , ψ_0 , w_0 определяются так, чтобы были удовлетворены условия относительно опор балки и чтобы деформация в направлении X_i имела величину -1 . Это достигается решением соответствующих уравнений для отдельных случаев (обычно это система максималльно двух линейных уравнений с двумя неизвестными). Граничные условия не использованные для определения неизвестных служат для проверки. Линии влияния для остальных внутренних сил получают из уравнения (6).

В дальнейшей части указано решение различных типов А... Е конструкций согласно рис. 5... 10, имеющих форму дуги круга (обозначения даны в рисунках). Для каждого типа определены внутренние силы $\bar{M}_i(\alpha)$, $\bar{K}_i(\alpha)$... и линии влияния $\eta_{M_i}(\alpha)$, $\eta_{K_i}(\alpha)$... внутренних сил основной системы, коэффициенты k , φ_0 , ψ_0 , w_0 для построения линий влияния согласно уравнений (5а, б) и даны контрольные уравнения (7) — (28). (Для решения рамы В вводятся кроме того обозначения $\tilde{\varphi}_{ia}$, $\tilde{\chi}_{ia}$, \tilde{u}'_{ia} , \tilde{v}'_{ia} и $\tilde{\varphi}'_{ia}$, $\tilde{\chi}'_{ia}$, \tilde{u}'_{ia} , \tilde{v}'_{ia} соотв. для углов наклона и перемещения в опоре d стойки от внутренних сил $M^{(i)}$, при чем предполагается заделка в точке $\alpha = 0$ от влияния деформации дугообразной балки se или стойки cd соотв.)

Кроме того дан приближенный способ решения для предварительного проекта конструкции. Изгибающие моменты, вертикальные срезающие силы и горизонтальные силы в раме можно приближенно определить для балки развитой в прямую. Ошибка составляет обычно несколько процентов. Приближенное определение крутящих моментов дает очень неточные значения с ошибкой до 100%. При этом исходят из условий равновесия пролета db (рис. 12) — уравнение (29) и из условий (30) статической эквивалентности внутренних сил в нормальных и косых сечениях (M_a^{pm} , M_b^{pm} обозначают величины для балки развитой в прямую). Крутящий момент в опоре определяется на основании оценки статически неопределимого отношения крутящих моментов в опорах к хорде ab , что делается для нагруженного пролета при помощи линии влияния μ_a , μ_b крутящих моментов прямой балки — уравнение (31) для шарнирной опоры и уравнение (32) для заделки, а для ненагруженного пролета по срезающей силе — уравнение (33). Приближенная проверка производится по моментам к другим осям чем к хорде db , например к осям опор. Для конкретного проекта (рис. 1 и 13) даны линии влияния (рис. 14) и произведено их сравнение с приближенным решением. В конце имеются различные примечания к проекту и расчету.

Замечания и отзывы к этой статье надо послать в трех копиях (не больше 2 страниц) редакции журнала до 30. 4. 1964 г., чтобы можно было опубликовать их в октябрьском номере 1964 г.

Zdeněk P. Bažant

INFLUENCE LINES OF HORIZONTALLY CURVED BRIDGES

The Author of the paper presents a method of computation of influence lines of bridges with curvilinear axis in plan which are supposed, with certain simplification, to behave as a bar system, for which the torsional moment can be regarded as proportional to the unit angle of twist. The influence lines η for a centrally applied unit live load and ζ for a unit transverse moment are evaluated as deflexion lines for strains of value -1 in the sense of the statically indeterminate quantity X_i . The notation is shown in Fig. 2. The procedure in general is as follows:

A statically determinate primary system is chosen having statically indeterminate quantities X_1, \dots, X_n and on the basis of conditions of equilibrium the internal forces $\bar{M}_i, \bar{K}_i, \dots$ of the primary statically determinate system for loading cases $\bar{X}_i = 1$ are found where from the elasticity factors δ_{ij} are found according to equation (1). By the solution of a system of $n - 1$ linear equations the values of statically indeterminate quantities $X_i^{(0)}$ are found for loading case

$X_i = X_i^{(0)} = -1$ in an $(n - 1)$ times statically indeterminate system derived from the given by disregarding the constraint X_i . The values of internal forces $M^{(i)}, K^{(i)}$ corresponding to quantities $X_i^{(0)}$ are given by equation (3). The deflexion line $\tilde{w}_i(\alpha)$, $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ of the curvilinear beam corresponding to these values is further computed, the curvilinear beam being supposed to be built — in the chosen point $\alpha = 0$ (occasionally also with values $\tilde{\chi}_i(\alpha)$ — Fig. 2, $\tilde{\varphi}_{i\beta}(\alpha)$ — a rotation in the vertical plane deviated from the normal in point $\alpha = 0$ by angle β etc.). For a circular beam (Fig. 3) it is given by equations (4а, б). In order to obtain the influence line $\eta_{xi}(\alpha)$, $\zeta_{xi}(\alpha)$ of a quantity X_i , the line $\tilde{w}_i(\alpha)$, $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ should be multiplied by coefficient k and should be rotated by angles φ_0 , ψ_0 in the point $\alpha = 0$ and be displaced by w_0 (Fig. 2b), which is expressed by equation (5а, б). The unknown values k , φ_0 , ψ_0 , w_0 are found in such a way as to satisfy the conditions of support of the beam and to make the deformation in the sense of X_i to assume the value -1 , which is obtained by the solution of corresponding equations for individual cases (usually a system of two linear equations with two unknowns at the maximum). The conditions of support, which had not been used to find the unknowns are convenient as a check. The influence lines of the other internal forces are to be found according to equation (6).

In the following part of the paper the solution of different types A to E of curvilinear structures shown in Fig. 5 to 10 is given (the notation is shown in the figures). For each of the types the internal forces $\bar{M}_i(\alpha)$, $\bar{K}_i(\alpha)$ and the influence lines $\eta_{M_i}(\alpha)$, $\eta_{K_i}(\alpha)$ of the internal forces of the principal system, the coefficients k , φ_0 , ψ_0 , w_0 necessary for evaluation of the influence lines according to equations (5а, б) and the checking formulas, see equations (7) to (28) are given. (For the purpose of the rigid frame analysis further symbols are adopted — $\tilde{\varphi}_{ia}$, $\tilde{\chi}_{ia}$, \tilde{u}'_{ia} , \tilde{v}'_{ia} or $\tilde{\varphi}'_{ia}$, $\tilde{\chi}'_{ia}$, \tilde{u}'_{ia} , \tilde{v}'_{ia} for deflections and displacements of the column base d stressed by internal forces $M^{(i)}$ for deflexions and displacements under assumption of constraint in $\alpha = 0$ due to the deformation of a curvilinear beam se or column cd .)

Further an approximate solution for preliminary design of the structure is given. Bending moments, vertical shearing forces and horizontal forces of frames may approximately be evaluated by adopting a rectilinear beam derived by developing the curvilinear beam into a straight beam. The error amounts to a few per cent. Contrary to that, the torsion moments may be evaluated only very roughly, the possible error amounting to about 100 per cent. Their evaluation is based on the equilibrium condition of span ab (Fig. 12) — equation (29) and on conditions (30) of statical equivalence of internal forces in perpendicular and inclined sections (M_a^{pm} , M_b^{pm} denote values applying to a straight developed beam). The torsional moment at the support is found by estimating the statically indeterminate ratio of torsional moments the chord ab to that at the support. This is to be done in the loaded span according to the influence line μ_a , μ_b of torsional moments of a straight beam — equation (31) for restrained support and in the non-loaded span according to a shearing force — equation (33). As an approximate check the moment conditions of equilibrium of the span with respect to other axes than the chord ab e. g. with respect to the axis connecting the points of support, may be used.

The form of influence lines (Fig. 14) are exemplified by one particular example of design (Fig. 13, Fig. 1) and compared with the approximate solution. The paper is concluded by several remarks concerning the design and choice of dimensions of the section.

Discussion of this paper should be sent in triplicate (one copy not exceeding 2 pages) to the Editor by 30. 4. 1964, to be published in the October issue of this Journal.

Korenov - Bridge Over Jizera River

Bazant 1961

