(Prague)

RELAXACE S PROMĚNNÝM ZATĚŽOVACÍM ČLENEM A JEJÍ UŽITÍ PŘI ŘEŠENÍ DESEK A PROBLÉMU KROUCENÍ

ZDENĚK P. BAŽANT

(Došlo dne 20. března 1959.)

Relaxace s proměnným zatěžovacím členem je zobecněním normální relaxační metody, při kterém se relaxuje síť při předem neznámých proměnných zatěžovacích členech a na řešení pro dané zatěžovací členy se pak přejde obecně lineárními kombinacemi, což vede ke zrychlení relaxačního postupu. Jsou uvedeny příklady z řešení desek a problému kroucení.

Při numerickém řešení lineárních parciálních diferenciálních rovnic eliptických metodou sítí a při řešení positivně definitních systémů lineárních rovnic rozšířilo se značně v poslední době užívání relaxační metody. Cílem tohoto pojednání je navrhnout metodu, kterou lze v četných případech normální relaxační proces značně urychlit, a to zejména tehdy, kdy normální relaxace je pomalá nebo i těžko proveditelná. Protože se při této metodě provádějí postupné změny nejen neznámých, jakou normální relaxace SOUTHWELOVY, avšak současně též změny hodnot pravých stran řešených rovnic, neboli zatěžovacích členů, budeme tuto metodu nazývat relaxací s proměnným zatěžovacím členem, jejíž princip autor navrhl r. 1958 [1]. Proměnné zatěžovací členy působí v tzv. vlastních či nevlastních singulárních bodech sítě, jež mají charakter okrajových bodů a lze v nich snadno odstraňovat residua. Systém lineárních rovnic se přitom řeší pro předem neznámé hodnoty pravých stran, ovšem se zřetelem na to, aby pak bylo možno přejít lineárními kobinacemi získaných stavů na řešení pro dané pravé strany. Podle této metody je též možno provést vyrovnání zatěžovacích členů podle residuí.

1. NĚKTERÉ VLASTNOSTI SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Uvažujme systém n lineárních rovnic o n neznámých

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i = Z_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

kde a_{ik} jsou dané koeficienty (reálná čísla) a Z_k dané pravé strany (reálná čísla). Nechť soustava má jediné řešení, tj. determinant

$$(a_{ik}) \neq 0\,. \tag{2}$$

Řešením systému pak je n-rozměrný vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{3}$$

Souhrn pravých stran Z_k považujme též za n-rozměrný vektor a pišme

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)\,. \tag{4}$$

Zvolme nyní místo tohoto vektoru vektory $\mathbf{Z}_{(j)}$ tvaru

$$\mathbf{Z}_{(j)} = (Z_{1(j)}, Z_{2(j)}, \ldots, Z_{r(j)}, k_{(j)}Z_{r+1}, k_{(j)}Z_{r+2}, \ldots, k_{(j)}Z_n)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, r, r+1\,, \tag{5}$$

kde $0 \leq r < n$. Nahradíme-li v systému (1) vektor pravých stran $\mathbf{Z}$ vektorem $\mathbf{Z}_{(j)}$, má pak takto vzniklá soustava jako jediné řešení vektor

$$\mathbf{x}_{(j)} = (x_{1(j)}, x_{2(j)}, \ldots, x_{n(j)})\,. \tag{6}$$

Vyslovme nyní tuto větu:

Věta 1.1. *Budiž dána soustava* (1), *pro niž platí podmínka* (2) *a která má pro vektor* (4) *pravých stran řešení* (3) *a pro vektor* (5) *pravých stran řešení* (6). *Nechť čísla* $Z_{1(j)}, Z_{2(j)}, \ldots, Z_{r(j)}, k_{(j)}$, *kde* $j = 1, 2, \ldots, r+1$, *jsou taková, jinak libovolná reálná čísla, že vektory*

$$(Z_{1(j)}, Z_{2(j)}, \ldots, Z_{r(j)}, k_{(j)})\,, \quad j = 1, 2, \ldots, r+1\,, \tag{7}$$

jsou lineárně nezávislé.

Za těchto předpokladů potom platí, že:

a) *řešení systému* (1) *je rovno*

$$\mathbf{x} = c_{(1)}\mathbf{x}_{(1)} + c_{(2)}\mathbf{x}_{(2)} + \ldots + c_{(r)}\mathbf{x}_{(r)} + c_{(r+1)}\mathbf{x}_{(r+1)}\,, \tag{8}$$

b) *kde čísla* $c_{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, r+1$, *jsou jediným řešením systému* $r+1$ *lineárních rovnic*

$$\sum_{j=1}^{r+1} Z_{k(j)}\, c_{(j)} = Z_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, r\,, \qquad \sum_{j=1}^{r+1} k_{(j)}\, c_{(j)} = 1\,. \tag{9}$$

Důkaz plyne snadno z běžných vět lineární algebry.

Mohli bychom tedy obecně řešit systém n rovnic takto:

Vytkneme si prvých r rovnic, zvolíme $r+1$ různých nezávislých vektorů $(x_{1(j)}, x_{2(j)}, \ldots, x_{r(j)}, x_{r+1(j)})$, kde $j = 1, 2, \ldots, r+1$, a po jejich dosazení pak $(r+1)$krát řešíme systém zbývajících $(n-r)$ rovnic s neurčitou původní pravou stranou $k_{(j)}Z_k$ $(k = r+1, \ldots, n)$ pro $(n-r)$ neznámých $x_{r+2(j)}, \ldots, x_{n(j)}$, $k_{(j)}$, přičemž musí být splněna podmínka řešitelnosti. Z prvých r rovnic pak vypočteme $r(r+1)$ hodnot $Z_{1(j)}, Z_{2(j)}, \ldots, Z_{r(j)}$, a ze systému

$(r + 1)$ rovnic pak za splnění předpokladů věty 1.1, což obvykle nastane, určíme $(r + 1)$ hodnot $c_{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, r + 1)$.

Pro další je vhodné všimnout si speciálních případů pro $r = 0$ a $Z_1 \neq 0$, $Z_2 = Z_3 = \ldots = Z_n = 0$, $r = 0$ a obecnou pravou stranu, $r = 1$ a $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$, $Z_3 = \ldots = Z_n = 0$, $r = 1$ a $Z_2 = \ldots = Z_n$ ap.

Obecně by takovýto postup při normálních způsobech řešení nebyl výhodný. Avšak to, že můžeme $(r + 1)$ neznámých volit a že nám tedy při relaxaci nezáleží na jejich hodnotě, můžeme, jak později ukážeme, využít k proměně zatěžovacích členů, čímž usnadníme odstraňování residuí.

2. RELAXACE

Při relaxačním řešení systému lineárních rovnic tvaru (1) zvolíme předem určité hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a aby nastala v rovnicích (1) rovnost, musíme k jejím pravým stranám připojit residua R_k,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i = Z_k + R_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{10}$$

Potom provádíme postupné změny Δx_i hodnot x_i, při čemž se mění, aby zůstala zachována rovnost, též residua R_k,

$$\Delta R_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i\,. \tag{1}$$

Cílem postupných změn Δx_i (relaxačních kroků) a jim odpovídajících změn ΔR_k je přivést residua R_k k nulovým, prakticky k dostatečně malým hodnotám, což je podstatou relaxační metody (podrobně viz [7], [8], [4], [5] aj.).

Při volbě relaxačních kroků, tj. změn Δx_i, je vhodná fysikální představa. Tak např. značí-li x_i průhyby membrány resp. desky, znamená diferenční rovnice příslušná k uzlu k při řešení harmonické resp. biharmonické rovnice ať s pravou stranou či bez ní rovnici rovnováhy pro příslušný uzel membrány resp. desky, zatížený břemenem úměrným velikosti pravé strany, to jest členu $Z_k + R_k$. Můžeme si představit, že část R_k zatížení těmito břemeny se přenáší prostřednictvím nějakých myšlených podpor, jimiž bychom mohli podepřít membránu nebo desku v každém uzlu sítě, a část Z_k, tj. zatěžovací člen, že je dané neměnné vnější zatížení. Relaxační pochod pak neznamená nic jiného, než že reakce těchto podpor postupně uvolňujeme až je přivedeme k prakticky zanedbatelným hodnotám.[1])

Relaxační metoda přináší oproti jiným postupným metodám zejména tu výhodu, že užívá skupinových a blokových relaxačních kroků, při nichž provádíme změny více hodnot x_i najednou. Tím se dosahuje zrychlení relaxačního procesu, které však mnohdy nestačí. V některých případech totiž, jako např. při složitějších okrajových podmínkách nebo při řešení části větší symetrické sítě, kdy diagonální koeficienty systému nejsou nijak výrazně větší než ostatní koeficienty, se residua těžko odstraňují; volba skupinových relaxací je obtížná a relaxace postupuje pomalu. Ukažme si nyní na základě vlastností uvedených v předešlém odstavci, jak lze v četných případech, zejména pak v případech pomalého postupu relaxace, relaxační proces dále navrženou metodou velmi značně urychlit.

[1]) Podle této představy lze řešit a řeší se vlastně relaxační metodou např. všechny lineárně pružné konstrukce. Jde pouze o to, že v konstrukci zavedeme další podpory, které postupně uvolňujeme (relaxujeme). Tak např. u rámových konstrukcí zavádíme vetknutí, které pak postupně uvolňujeme. V tomto smyslu patří k relaxačním metodám též metoda rozdělování sil a momentů, metoda rozdělování deformací pro řešení rámových konstrukcí aj.

3. RELAXACE S PROMĚNNÝM ZATĚŽOVACÍM ČLENEM

Způsob, jak při relaxaci odstraňujeme residua, záleží v tom, že je stahujeme k okrajovým bodům, kde je odstraňujeme blokovými relaxacemi. Odstraňování residuí je totiž snadné, jsou-li v síti rozdělena s opačnými znaménky. Po několika relaxačních krocích je snadno zmenšíme a vyrovnáme do přibližně stejné hladiny hodnot. Další postup je již při normální relaxaci obtížný. Residua musíme převést k okraji a zde odstranit blokovou relaxací. Čím blíže je od jednotlivých bodů k okraji nebo čím více je okrajových bodů, tím snadněji převedeme residua k okraji a tím rychleji proces postupuje.

Kdyby se tedy podařilo dát některým dalším bodům sítě charakter okrajových bodů nebo zavést nějaké další fiktivní body, které by měly charakter okrajových bodů, urychlili bychom tím značně relaxaci. To právě umožňuje relaxace s proměnným zatěžovacím členem. Body, které mají charakter okrajových bodů, tj. že můžeme v nich snadno odstraňovat residua, nazveme singulární body sítě. Mohou to být buď přímo body sítě nebo nějaké myšlené další body.

A. Aby se některý bod sítě stal *singulárním bodem sítě* stačí, prohlásíme-li v rovnici (10) výraz $Z_k + R_k$ za zatěžovací člen $\overline{Z}_k$,

$$\overline{Z}_k = Z_k + R_k\,, \tag{12}$$

potřebný k dosažení rovnováhy při daném stavu hodnot x_i. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i = \overline{Z}_k\,. \tag{13}$$

K dosažení rovnováhy v daném bodě nemusíme pak zavádět v tomto bodě žádnou myšlenou podporu, tento bod nemá residuum. Člen Z_k je ovšem podle rovnice (13) proměnný, není možno jej předem volit, neboť po každé změně Δx_i hodnot x_i je třeba jiného zatížení k dosažení rovnováhy. Z rovnice (12) plyne, že se člen $\overline{Z}_k$ mění stejně jako residuum R_k v tomto bodě

$$\Delta \overline{Z}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i\,. \tag{14}$$

Na změně členu Z_k přitom nezáleží. Do tohoto bodu můžeme stahovat residua a tím, že je zahrneme do zatěžovacího členu $\bar{Z}_k$, je prostě odstraníme. Změnou hodnoty x_k v tomto bodě můžeme ovlivňovat hodnoty residuí v okolních bodech. Relaxační řešení takto prováděné má přitom tu zvláštnost, že řešíme předem neznámý zatěžovací případ a teprve když dojdeme k výsledku, získáme zároveň zatížení, které řeší výsledné hodnoty x_i. Výsledné hodnoty $\bar{Z}_k$ odpovídají obecně složkám vektorů (5) a průhybové hodnoty x_i vektorům (6). Toho, aby vektory (6) byly lineárně nezávislé, dosáhneme obyčejně tím, zvolíme-li různé výchozí hodnoty x_i. Aby chyba při vyčíslování výsledku z vektorů (6) nebyla velká, musí tyto vektory svírat co největší úhel, což dosáhneme obyčejně tím, že volíme výchozí hodnoty jako citem odhadnuté řešení pro různé zatěžovací stavy, jejichž vektory (5) svírají velký úhel.

Singulární body nemůžeme volit libovolně. Musíme je volit tak, abychom mohli od získaného stavu, případně od několika získaných stavů, přejít podle rovnice (9) na řešení dané úlohy, a aby celé řešení nebylo pracnější než bez nich. Kdybychom si totiž zvolili při obecných pravých stranách Z_k r singulárních bodů, musili bychom relaxaci provést $(r + 1)$krát, abychom získali $(r + 1)$ vektorů (6). Zvolíme-li při speciální pravé straně, kdy r ze členů Z_k je nenulových, v příslušných bodech singulární body, nutno relaxovat r-krát, jak ukázáno v kap. 1. Máme-li tedy jedinou nenulovou pravou stranu (např. zatížení desky jedním osamělým břemenem) a zvolíme-li v tomto bodě singulární bod sítě (nebo-li proměnné zatížení), stačí relaxovat jedenkrát. Při volbě více singulárních bodů může být relaxace též výhodná, je-li úspora z urychlení postupu větší než ztráta z několikanásobné relaxace (jako dále v př. 4). Za singulární bod je vhodné volit bod s osamělým břemenem, bod uprostřed sítě nebo bod, v němž se obtížně odstraňují residua.

B. Residua v jednotlivých bodech sítě můžeme též ovlivňovat tím způsobem, že jejich část velikosti $\bar{k}Z_k$ v jednotlivých bodech pokládáme za vnější zatížení a připojíme ji k daným zatěžovacím členům Z_k. Provádíme-li takovéto změny zatížení, má vnější zatížení při všech relaxačních krocích obecně tvar

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{k}\mathbf{Z} \,, \tag{15}$$

kde $\bar{k}$ je proměnný koeficient. Jde tedy opět o proměnu vnějšího zatížení (mění se vektor všech zatěžovacích členů $\bar{\mathbf{Z}}$). Tento případ lze též uvést v souvislost s předešlým případem singulárního bodu. Představme si všechny uzly sítě spojeny s nějakým dalším myšleným bodem, jemuž přiřazujeme hodnotu koeficientu $\bar{k}$, prostřednictvím relaxačního operátoru $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$, jako je např. poslední řádek v tab. 1 nebo 3. Změně hodnoty koeficientu $\bar{k}$, spojeného s tímto bodem, pak odpovídají změny residuí $\Delta\bar{k}Z_1$, $\Delta\bar{k}Z_2, \ldots, \ldots, \Delta\bar{k}Z_n$, čili

$$\Delta R_k = -\,\Delta\bar{k}Z_k = -\,\Delta\bar{Z}_k \,. \tag{16}$$

Tento bod má obdobný význam jako singulární bod sítě v odstavci 3A. a nazveme jej *nevlastním singulárním bodem sítě*. K tomuto bodu zapisujeme hodnotu koeficientu $\bar{k}$ vnějšího zatížení, nebo v případě rovnoměrného zatížení hodnotu zatěžovacího členu, které jsou v průběhu relaxace proměnné. S jedním nevlastním singulárním bodem nemusí být spojeny všechny body sítě, ale může to být též určitá zvolená skupina bodů (stejné zatěžovací členy jen v části sítě). Můžeme tedy podobně jako v odstavci A volit též více nevlastních singulárních bodů.

Tento způsob relaxace s proměnným zatěžovacím členem je zvláště výhodný, jestliže pravé strany rovnic (1) jsou všechny stejné (např. rovnoměrně zatížená deska, kroucení), nebo aspoň stejného znaménka a přibližně stejné hodnoty. Při relaxaci každé sítě totiž velmi snadno odstraňujeme residua, jsou-li různých znamének. Po několika relaxačních krocích vyrovnáme residua do přibližně stejné hladiny a stejného znaménka. Další pochod je pak při normální relaxaci již obtížný, neboť vyžaduje skupinových relaxací. Střední hodnotu těchto residuí, určenou odhadem, převedeme zde však do proměnného zatěžovacího členu $\bar{Z}$ a dostaneme tak během jediného kroku stav residuí, v němž jsou residua opět různých znamének, ale již značně menší, a můžeme cyklus opakovat.

V jedné síti je možno volit vlastní i nevlastní singulární body sítě zároveň a provádět kroky podle způsobů A i B.

K upřesnění výsledku umožňuje navržená metoda provést *vyrovnání zatěžovacích členů podle residuí*, což je důležité zejména tehdy, nebyla-li residua přivedena k dostatečně malým hodnotám. Z výsledného proměnného zatěžovacího členu $\bar{Z}_m$ resp. $\bar{Z}$ ve vlastním resp. v nevlastním singulárním bodu sítě považujeme přitom určitou část $R_{m,0}$ resp. R_0 též za residuum,

$$\bar{Z}_m = \bar{Z}_{m,0} + R_{m,0} \quad \text{resp.} \quad \bar{Z} = \bar{Z}_0 + R_0 \,, \tag{17}$$

jehož velikost určíme z podmínky, aby zatížení výslednými residui R_k včetně $R_{m,0}$ resp. R_0 vyvozovalo nulovou hodnotu určité neznámé x_m. To můžeme provést podle pořadnic $\delta_{m,k}$ příčinkové plochy neznámé x_m, které buď předběžně vypočteme nebo i odhadneme. Přitom nezapomeňme, že řešíme-li jen část symetrické sítě (soustavy), je třeba uvažovat R_k i $\delta_{m,k}$ ve všech bodech sítě (místech soustavy)[2] Ve vlastním singulárním bodě sítě platí (R_k v singulárních bodech sítě jsou nulová)

$$R_{m,0} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_{m,k}}{\delta_{m,m}} R_k \tag{18}$$

---

[2]) Residua $R_{m,0}$ můžeme též zavést v několika singulárních bodech zároveň a jejich velikost určit z podmínky, aby zatížení výslednými residui včetně hodnot $R_{m,0}$ vyvozovalo nulové hodnoty několika určitých zvolených neznámých. Potom je však třeba přibližně určit několik příčinkových ploch.

a v nevlastním singulárním bodě sítě při rovnoměrném zatížení platí

$$R_0 = -\frac{\sum_{k=1}^{n} \delta_{m,k} R_k}{\sum_{k=1}^{n} \delta_{m,k}} . \tag{19}$$

Za bod m volíme v případě A singulární bod sítě, v případě B jakýkoliv bod sítě, avšak takový, v němž nám především záleží na přesné hodnotě neznámé (nejlépe uprostřed sítě, poněvadž lze pak předpokládat, že mezilehlé hodnoty x_k budou přesnější). Jako výslednou hodnotu proměnného zatěžovacího členu pak vezmeme do výpočtu $\overline{Z}_{m,0} = \overline{Z}_m - R_{m,0}$ resp. $\overline{Z}_0 = \overline{Z} - R_0$. Takovéto vyrovnání zatěžovacích členů podle residuí je možné provést po každém řešení postupnou metodu, např. iterací, metodou rozdělování sil a momentů nebo deformací ap.

Možnost relaxace s proměnným zatěžovacím členem je dána platností principu superposice, který je důsledkem linearity problému.

4. POUŽITÍ A VÝHODY RELAXACE S PROMĚNNÝM ZATĚŽOVACÍM ČLENEM

Celkově můžeme tedy říci, že navržená relaxační metoda s proměnným zatěžovacím členem, která je zobecněním normální relaxační metody, přináší tu výhodu, že dává k disposici další body sítě charakteru okrajových bodů, do nichž pak můžeme stahovat residua. Tím značně urychluje relaxační proces, zejména v případech, kdy normální relaxace postupuje pomalu nebo vůbec ne, jako tomu bývá při obtížných okrajových podmínkách nebo při řešení části větší symetrické sítě (diagonální koeficienty nejsou znatelně větší než ostatní), a rozšiřuje tak použití relaxační metody též tam, kde byla dosud nevýhodná.

Její použití je vždy výhodné v případech, jsou-li všechny pravé strany stejné (rovnoměrně zatížená deska, kroucení), nebo máme-li jedinou nenulovou pravou stranu (deska zatížena jedním osamělým břemenem). V případě dvou, tří, případně i více nenulových pravých stran je její užití výhodné vždy tehdy, musíme-li řešit dva, resp. tři resp. více zatěžovacích stavů. Tak např. máme-li řešit desku pro několik různých zatěžovacích stavů dvěma břemeny působícími vždy v týchž dvou bodech, nebudeme to dělat tak, že napřed vyřešíme desku pro zatížení jednotkovým břemenem v každém ze dvou bodů a potřebné zatěžovací stavy budeme vyčíslovat odtud, jak se to v praxi obvykle nevhodně provádí, ale provedeme to vždy tak, že zvolíme v těchto dvou bodech singulární body sítě, vyřešíme si dva libovolné, předem neznámé zatěžovací stavy dvou břemen, z nichž pak sestavujeme lineárními kombinacemi řešení pro dané stavy. To, že pro sestavení lineárních kombinací musíme řešit systém dvou rovnic, je zanedbatelné vzhledem ke značnému urychlení relaxace při dvou singulárních bodech. Podobně máme-li řešit např. desku pro zatížení jednak rovnoměrné, jednak osamělým břemenem, zvolíme vždy jeden vlastní a jeden nevlastní singulární bod, nebo máme-li řešit desku pro zatížení rovnoměrné ve dvou různých částech sítě, je na místě volba dvou nevlastních singulárních bodů.

V ostatních případech, tj. když volíme více singulárních bodů, ale neřešíme více zatěžovacích stavů, je její použití výhodné jenom tehdy, je-li úspora z urychlení řešení větší než ztráta z několika relaxací, jako např. v příkladě 4, což musíme citem a zkušeností odhadnout. Tak např. v případě, že jsou všechny pravé strany stejné, nebo jediná nenulová pravá strana (nebo též všechny stejné až na jednu), a zvolíme-li jeden vlastní plus jeden nevlastní singulární bod sítě, musíme relaxovat dvakrát a výhodnost je zde sice možná, ale nezaručená. Rozhodnout se musíme na základě zkušeností. Přesné kriterium zatím nemáme.

V případě jediné nenulové pravé strany navržená metoda též snižuje počet rovnic o jednu, i když ji nechápeme jako metodu relaxační. V případě, když máme r nenulových pravých stran a když musíme řešit r různých zatěžovacích stavů, snižuje počet rovnic o r, ale musíme navíc řešit systém r rovnic, což je při malém r zanedbatelné.

Připomeňme konečně, že rychlost postupu všech relaxačních metod velmi podstatně závisí na zručnosti a zkušenosti počtáře, na tom, jak vhodně dovede volit jednotlivé kroky.

5. PŘÍKLADY

Pro praktické objasnění uvádíme několik příkladů na relaxaci s proměnným zatěžovacím členem jednoduchých typů z oboru stavebního, řešených pomocí hrubších sítí. Při větších sítích by se výhody navržené metody pocítily ještě výrazněji.

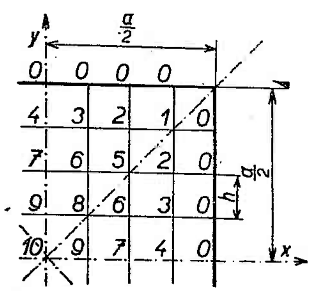
V obrázcích relaxačních výpočtů (obr. 2, 4, 6, 8) zapisujeme nad příslušné body vlevo zvolené výchozí hodnoty neznámých a vpravo jejich výsledné hodnoty, odpovídající výsledným hodnotám zatěžovacích členů. Pod příslušné body zapisujeme po řadě do sloupců hodnoty residuí. Na prvém místě jsou jejich výchozí hodnoty, na posledním jejich výsledné hodnoty. Prováděné relaxační kroky zapisujeme po řadě do zvláštní tabulky vedle výpočtu. Singulární body sítě (vlastní i nevlastní) označujeme dvěma kroužky a zapisujeme u nich formálně stejným způsobem jako residua hodnoty proměnných zatěžovacích členů.

Příklad 1. Kroucení prutu plného čtvercového průřezu (obr. 1). Diferenciální rovnice je

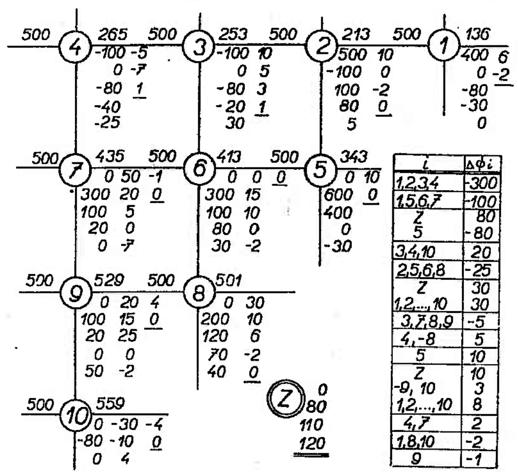
$$\nabla^2 \Phi(x, y) = -2G\vartheta , \tag{20}$$

kde ∇^2 je harmonický operátor, $\Phi(x, y)$ je funkce kroucení, ϑ poměrný úhel zkroucení, G modul pružnosti ve smyku. Okrajová podmínka je rovnost $\Phi = 0$ na okraji průřezu [3], [6]. Fysikální analogií je zde membrána zatížená v uzlech sítě rovnoměrným zatížením Z. Vyjádříme-li operátor ∇^2 v diferenčním tvaru (viz [4], [8]) a zavedeme-li čtvercovou síť o kroku $h = a/8$ podle obr. 1, dostaneme systém 10 diferenčních rovnic pro neznámé hodnoty $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ $\ldots, \Phi_{10}$ v bodech 1, 2, …, 10, jež však v případě harmonické rovnice není nutno sestavovat, neboť lze počítat přímo pomocí harmonického relaxačního operátoru [8]. Vzhledem k symetrii průřezu, sítě a pravé strany rovnice (20) podle čtyř vyznačených os jsou hodnoty funkce Φ též symetrické podle těchto os a stačí řešit jen jednu osminu sítě. Pravé strany těchto diferenčních rovnic mají tvar

(21) $$Z = 2G\vartheta h^2\,.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Relaxační výpočet s proměnným zatěžovacím členem $\overline{Z}$ podle způsobu vyloženého v odstavci 3B. (nevlastní singulární bod sítě) je proveden na obr. 2. Z výsledných hodnot Φ_k na obr. 2 určíme pak řešení podle věty 1.1, která zde přechází v přímou úměrnost

(22) $$\Phi_1 = 1{,}13Z,\quad \Phi_2 = 1{,}77Z,\quad \Phi_3 = 2{,}11Z,\quad \Phi_4 = 2{,}21Z,\quad \Phi_5 = 2{,}85Z,$$
$$\Phi_6 = 3{,}44Z,\quad \Phi_7 = 3{,}62Z,\quad \Phi_8 = 4{,}17Z,\quad \Phi_9 = 4{,}40Z,\quad \Phi_{10} = 4{,}65Z\,.$$

Příklad 2. Určíme momenty uprostřed rovnostranné trojúhelníkové desky o straně a, po obvodě kloubově uložené, která je zatížena osamělým břemenem P uprostřed desky, jež se přenáší na desku jako rovnoměrné zatížení po ploše šestiúhelníka opsaného kružnici o průměru $a/9$ (obr. 3).

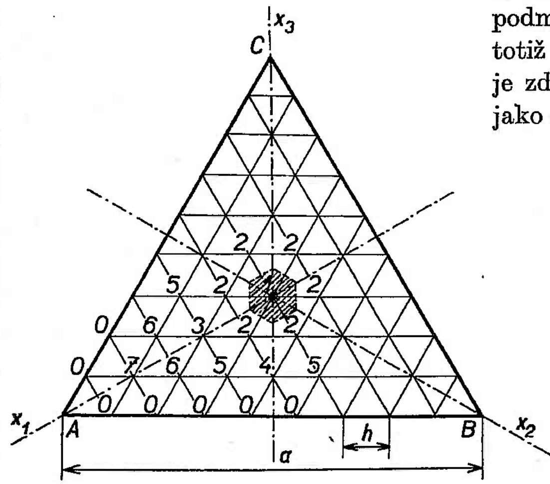
Diferenciální rovnici průhybové plochy desky lze v tomto případě převést na řešení dvou harmonických rovnic s pravou stranou, (3) z nichž první má tvar

(23) $$\nabla^2 M = -q\,,$$

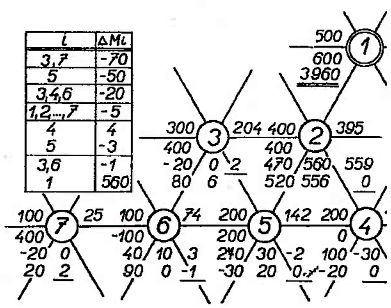
kde $q = q(x, y)$ značí měrné zatížení v určitém bodě, M značí hodnotu

(24) $$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$$

v témž bodě, kde opět M_x, M_y značí hodnoty momentů, μ Poissonovo číslo. Druhá harmonická rovnice s pravou stranou pak určuje hodnoty průhybů w pomocí hodnot M a nebudeme ji potřebovat. Toto rozložení na dvě rovnice je možné proto, že zde známe okrajové podmínky pro M. Na kloubovém okraji totiž platí $M = 0$. Fysikální analogií je zde opět membrána stejně zatížená jako deska.



Obr. 3.



Obr. 4.

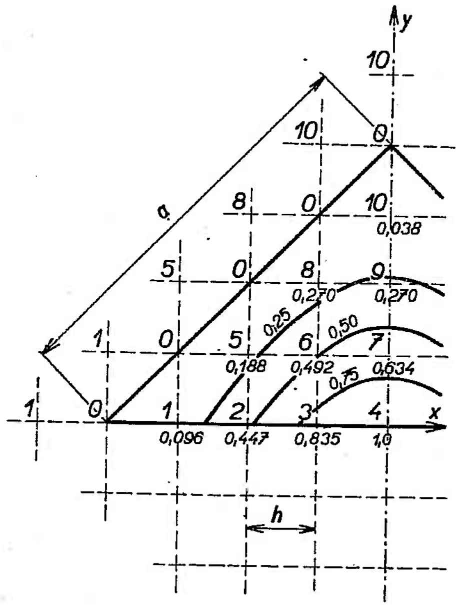
Zavedeme trojúhelníkovou síť o straně $h = a/9$ dle obr. 3. Užijeme-li symetrie podle tří vyznačených os, postačí určit 7 neznámých $M_1, M_2, \ldots, M_7$, jejichž diferenční rovnice mají obecně pravou stranu

(25) $$Z = \tfrac{3}{2}qh^2$$

a stejně jako v př. 1 je není třeba sestavovat. V bodě 1 je $q_1 = 2P/h^2\sqrt{3}$ a tedy $Z_1 = P\sqrt{3}$, $Z_2 = \ldots = Z_7 = 0$. Při řešení použijeme relaxace s proměnným zatěžovacím členem, podle odst. 3A. s jedním singulárním bodem v bodě 1 pod osamělým břemenem (viz obr. 4). Výsledná hodnota zatěžovacího členu Z_1 vyšla $Z_1' = 3960$ při hodnotě $M_1' = 1055$. Podle věty 1.1 pak dostaneme $M_1 = M_1'Z_1/Z_1' = 0{,}46P$. Protože průhybová plocha desky musí být v bodě 1 souměrná podle tří oskulačních rovin svisle proložených osami souměrnosti trojúhelníka, platí, že $M_{1x} = M_{1y}$. Potom dostáváme podle (24) pro momenty ve středu desky

(26) $$M_{1x} = M_{1y} = \tfrac{1}{2}(1 + \mu)\, M_1 = 0{,}23P(1 + \mu)\,.$$

Příklad 3. Určeme průhybovou plochu a maximální průhyb železobetonové desky tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, na odvěsnách délky a vetknutého a na přeponě volného, při rovnoměrném zatížení q (obr. 5).



Obr. 5.

Diferenciální rovnice úlohy je

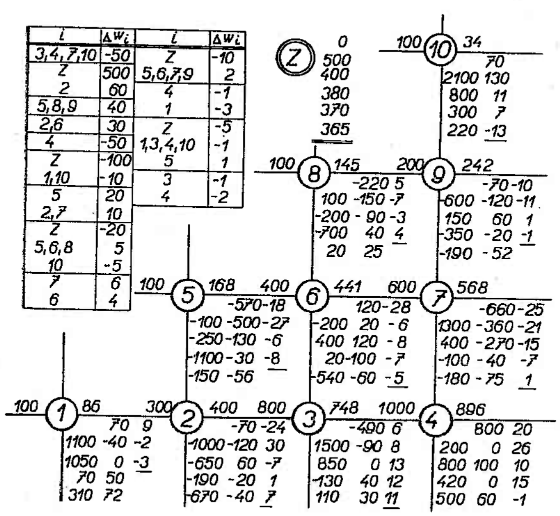
$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}\,, \tag{27}$$

kde w je průhybová pořadnice, ∇^4 biharmonický operátor a D válcová tuhost desky. Okrajové podmínky pro volný okraj, zavedeme-li osu y kolmo k němu a osu x s ním rovnoběžně, jsou při $\mu = 0$ (železobeton)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} = 0\,. \tag{28}$$

Okrajová podmínka vetknutého okraje vyžaduje souměrnost prodloužené průhybové plochy podle vetknutého okraje. Zavedeme čtvercovou síť o straně $h = a\sqrt{2}/8$ podle obr. 5. Vyjádříme-li operátor ∇^4 a diferenciální operátory okrajových podmínek v diferenčním tvaru [4] a sloučíme-li v okrajových bodech podmíněné rovnice rovnováhy s rovnicí okrajových podmínek tak, aby vypadly hodnoty w na prodloužení průhybové plochy vně desky (pomocí tzv. výsledných okrajových operátorů), dostaneme systém rovnic, zapsaný ve sloupcích relaxační tabulky 1, pro 10 neznámých $w_1, w_2, \ldots, w_{10}$. Pravé strany všech rovnic jsou stejné a jsou rovny

$$Z = \frac{qh^4}{D}\,. \tag{29}$$



Obr. 6.

Relaxační výpočet s proměnným zatěžovacím členem $\overline{Z}$ podle způsobu 3B. je proveden na obr. 6. Podle vzorce (19) provedeme pomocí odhadnuté příčinkové plochy $\delta_{4,k}$ vyrovnání zatěžovacího členu Z podle residuí, tak aby uprostřed volného okraje v bodě 4 vyvozovala residua včetně $R_{4,0}$ nulový průhyb. Dostaneme tak $Z'_{4,0} = 365 - 2{,}8 = 362{,}2$ a odtud ($w'_4 = 896$)

$$w_4 = w_{\max} = w'_4\,\frac{Z}{Z'_{4,0}} = 0{,}00241\,\frac{qa^4}{D}\,. \tag{30}$$

Tabulka I.

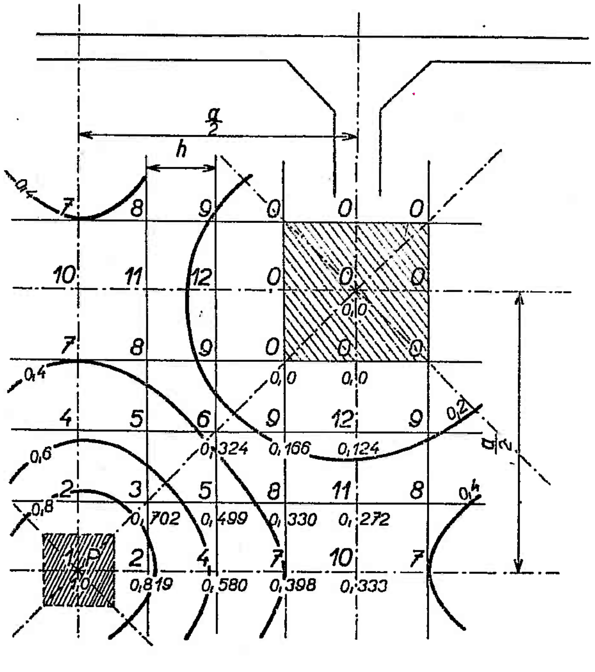
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	−8	1		3					
2	−8	16	−8	2	−6	2				
3	1	−8	17	−16	2	−6	4	1		
4		1	−8	16		2	−6		1	
5	6	−12	4		21	−8	2	3		
6		4	−12	8	−8	20	−16	−8	4	
7			4	−12	1	−8	19	2	−8	1
8			2		3	−8	4	23	−16	6
9				2		2	−8	−8	20	−8
10							1	3	−8	25
Σ	20	−7	0	0	16	−4	0	16	−7	24
Z	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

Průhybová plocha desky při jednotkové maximální hodnotě průhybu je zakreslena v obr. 5 svými vrstevními čarami a hodnotami v uzlech sítě. Vidíme, že řešení této již komplikovanější soustavy rovnic bylo provedeno velmi rychle při 13 relaxačních krocích. Normální relaxační výpočet postupoval značně hůře a nebyl dokončen ani po 35 krocích.

Příklad 4. Určíme příčinkovou plochu průhybu uprostřed polí oběma směry nekonečné železobetonové desky hřibového stropu podle obr. 7 pro zatížení jednotkovými břemeny položenými souměrně podle všech možných os, vedenými řadami podpor stropu. Jednotlivá pole jsou čtvercová o straně a, a tuhé podpory desky mají na horním konci tvar čtverců o straně $a/4$. Tato úloha je ekvivalentní s úlohou určit průhybovou plochu této desky při zatížení všech polí stejnými osamělými břemeny P v jejich středech. Předpokládejme, že osamělá břemena se přenášejí na desku rovnoměrným zatížením na čtvercových ploškách o straně $a/8$.

Diferenciální rovnice úlohy je zde opět rov. (27). Protože deska i zatížení jsou vzhledem k nekonečnosti stropu souměrné podle stran čtverce, stačí řešit toto jediné pole a protože toto pole je opět souměrné podle čtyř os souměrnosti čtverce, stačí řešit $\frac{1}{8}$ tohoto čtverce. Okrajové podmínky pro tuto část pak jsou jednak souměrnost průhybové plochy podle strany čtverce a podle dvou os souměrnosti čtverce, které ji omezují, a za druhé nulové hodnoty průhybu w v bodech spočívajících na podpoře.

Zvolíme čtvercovou síť o straně $h = a/8$. Máme potom určit 12 neznámých průhybových hodnot $w_1, w_2, \ldots, w_{12}$. Vyjádříme-li stejně jako v předešlém případě rovnice (27) a okrajové podmínky v diferenčním tvaru, dostaneme relaxační tabulku 2. Pravé strany jsou podle (29) vesměs nulové vyjma $Z_1 = qh^4/D = P^2h/D$. Normální relaxace by v tomto případě postupovala velmi špatně, neboť máme prakticky jen dva okrajové body, v nichž bychom mohli odstraňovat residua (ani po 50 krocích se nepodařilo dosáhnout výsledku). Ani při volbě jednoho singulárního bodu v bodě 1 by zlepšení konvergence ještě nebylo dostatečné. Proto byl zvolen ještě jeden singulární bod 5, i za cenu, že je nutno řešit dvakrát. Relaxace pak dobře postupují. Oba relaxační výpočty při dvou proměnných zatěžovacích členech $\bar{Z}_1, \bar{Z}_5$, podle způsobu z odstavce 3A. jsou zapsány na obr. 8 stejným způsobem jak bylo dříve vyloženo, pouze s tím rozdílem, že pravý výpočet je zapsán celý vlevo od příslušných bodů a druhý vpravo. Výchozí hodnoty v obou relaxacích byly zvoleny různé, aby výsledné zatěžovací vektory byly lineárně nezávislé (a z důvodu přesnosti též „od tohoto stavu podstatně vzdálené"). Podle vzorce (18) provedeme pomocí předběžně vypočtené příčinkové plochy $\delta_1(x, y)$ vyrovnání zatěžovacího členu Z_1 podle residuí, tak aby v bodě *1* vyvozovala residua včetně $R_{1,0}$ nulový průhyb. Dostaneme tak $Z'_{1,0} = 1068 + 3 = 1071$, $Z''_{1,0} = -255 + 15 = -240$.



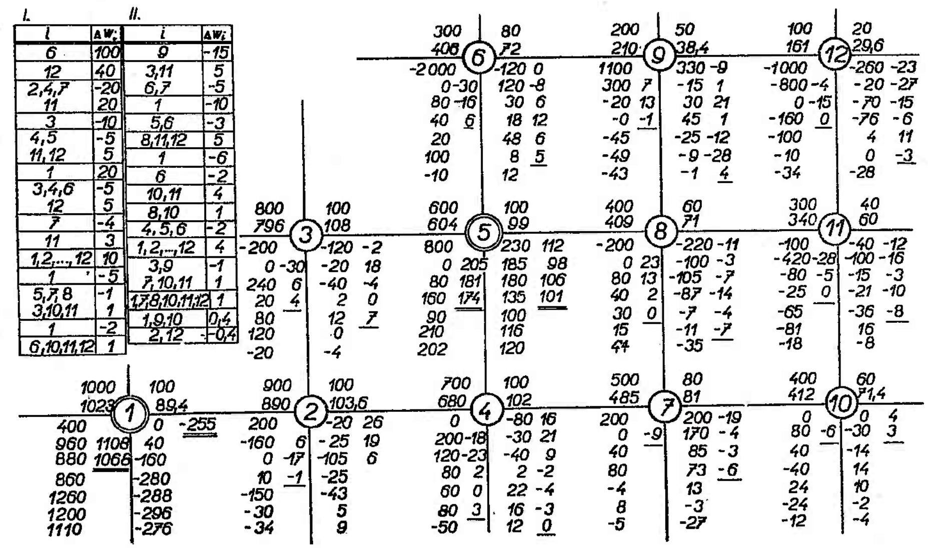
Obr. 7.

Sestavíme-li takovou lineární kombinaci obou stavů, která dává $Z_5 = 0$ a $w_1 = 1$, dostaneme hodnoty $\eta(x, y)$ hledané průhybové plochy, odpovídající jednotkovému průhybu uprostřed pole, jimž odpovídá hodnota $Z'_1 = 1{,}71$.

Hodnoty $\eta(x, y)$ jsou zapsány u příslušných uzlů v obr. 7, kde jsou též zakresleny vrstevní čáry plochy $\eta(x, y)$. Hodnoty $\delta_1(x, y)$ příčinkové plochy průhybu odpovídají členu $Z_1 = h^2/D$ a jsou

$$\delta_1(x, y) = 0{,}00915 \frac{a^2}{D} \eta(x, y)\,, \tag{31}$$

odkud je též přímo patrný průhyb uprostřed pole pod břemenem P. Pro



Obr. 8.

Tabulka II

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	20	−8	2	1								
2	−32	25	−16	−8	3		1					
3	8	−16	22	4	−8	2		1				
4	4	−8	4	20	−8	2	−8	2		2		
5		6	−16	−16	23	−16	4	−8	3		2	
6			2	2	−8	20		2	−8			2
7		1		−8	2		21	−8	1	−16	4	
8			2	4	−8	4	−16	22	−8	8	−16	4
9					3	−16	2	−8	23		4	−16
10				1			−8	2		20	−8	1
11					1		4	−8	2	−16	21	−8
12						2		2	−8	2	−8	20
Σ	0	0	0	0	0	−2	0	−1	5	0	−1	3

rovnoměrné zatížení q můžeme z příčinkové plochy $\delta_1(x, y)$ vypočíst

$$(32)\quad w_1 = \int_O\int q(x, y)\, \delta_1(x, y)\, dx\, dy = 0{,}00915\, \frac{qa^2}{D} \int_O\int \eta(x, y)\, dx\, dy = $$
$$= 0{,}00323\, \frac{qa^4}{D}\,,$$

kde poslední dvojný integrál, který znamená objem plochy $\eta(x, y)$ v oboru O jednoho pole, byl vypočten přibližně Simpsonovým pravidlem. Ze získaných stavů můžeme též vyčíslit řešení pro zatížení v bodě 5 nebo v bodech 1 i 5. Kdybychom potřebovali zároveň řešit desku pro zatížení v bodě 5 nebo pro zatížení v bodech 1 i 5, bylo by použití této metody obzvláště výhodné, protože tak jako tak bychom museli relaxovat dvakrát.

Další příklad relaxace s proměnným zatěžovacím členem při řešení šikmé desky s volnými okraji s jedním singulárním bodem sítě může čtenář najít v autorově článku [1]. Ve [2a] je uvedeno řešení komplikovaného systému 18 rovnic pro šikmou desku. Bylo provedeno s jedním vlastním plus jedním nevlastním singulárním bodem během 20 resp. 22 kroků. Pracnost řešení je tam podrobně rozebrána a porovnána s jinými způsoby a bylo shledáno, že řešení zde navrženou metodou je v tomto případě nejméně dvakrát rychlejší než řešení normální relaxací bez singulárních bodů.

Literatura

[1] *Bažant Z. P.:* Relaxační řešení šikmých desek s volnými okraji; Inženýrské stavby 1958, č. 8, str. 437.

[2] *Bažant Z. P.:* Anwendung der Relaxationsmethode mit veränderlichem Belastungsglied für die Berechnung der schiefen Platten; Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Dresden, 1959/60, H. 2, str. 391.

[2a] *Bažant Z. P.:* Beitrag zur Differenzenlösung schiefer Platten und eine neue Art der Relaxationsmethode; Bauplanung-Bautechnik, Berlin (v tisku).

[3] *Beyer K.:* Die Statik in Stahlbetonbau; Berlin 1956, Springer.

[4] *Collatz L.:* Numerische Behandlung von Differenzialgleichungen; Berlin 1951, Springer.

[5] *Kovařík V.:* Přibližné metody v rovinné pružnosti (skripta); Praha 1957, SNTL.

[6] *Servít R.:* Nauka o pružnosti a pevnosti, II. díl (skripta); Praha 1955, SNTL.

[7] *Southwell R. V.:* Relaxation Methods in Engineering Science. A treatise on aproximate computation; Oxford Univ. Press 1940.

[8] *Southwell R. V.:* Relaxation Methods in Theoretical Physics. A continuation of the treatise; Oxford 1946.

[9] *Timoshenko S. P.:* Theory of Plates and Shells; New York 1940, Mc Graw-Hill.

Резюме

РЕЛАКСАЦИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ГРУЗОВЫМ ЧЛЕНОМ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛАСТИН И ПРОБЛЕМА КРУЧЕНИЯ

ЗДЕНЕК П. БАЖАНТ (Zdeněk P. Bažant)

Релаксация с переменным грузовым членом является обобщением нормального релаксационного метода, позволяющим ускорить ход релаксации. Это ускорение является особенно эффективным, когда нормальная релаксация продвигается медленно вперед, с чем встречаемся в случае более сложных краевых условий или в случае решения части более великой симметрической сетки, когда диагональные коэффициенты системы линейных уравнений не превышают выразительно остальных членов.

По предполагаемому методу изменяются постепенно не только неизвестные, как это делается при нормальной релаксации, но и правые части уравнений, т. наз. грузовые члены. При этом поступаем таким образом, что в сетке выберем точки, в которых рассматриваем вместо ресидуей переменные грузовые члены, которые формально изменяются так же, как ресидуи. Избирая релаксационные шаги, мы не должны считаться с изменениями этих членов, в результате чего можно их свести в ресидуи, и тем самым быстро их ликвидировать.

Точки сетки, в которых действуют переменные грузовые члены, приобретают характер краевых точек и называются особенными точками сетки. Они могут быть собственными и несобственными. Собственная особая точка является непосредственно точкой сетки и изменение ее грузового члена является по отношению к остальным произвольным. В случае несобственной особой точки изменяем одновременно грузовые члены в определенной части сетки, а именно таким образом, что отношения их значений остаются одинаковыми, чаще всего они имеют одинаковое значение. Их изменение определено изменением одного параметра, значение которого сопоставляем с особой точкой сетки, связанной с точками, в которых действуют переменные грузовые члены. Изменения неизвестных вызывают изменения ресидуей в этих точках, но не оказывают влияния на переменные грузовые члены.

Особенность решения по этому методу заключается в том, что решаем состояние загружения, которое заранее неизвестно. Поэтому не можем выбирать особые точки произвольно, но таким образом, чтобы мы могли решение при данных правых частях определить как линейную комбинацию полученных состояний. Для этого необходимо при выборе r особых точек производить релаксацию в общем случае $r + 1$ раз, в частных случаях

r раз. Предлагаемый метод является особенно выгодным для решения системы с одинаковыми, неравными нулю, правыми частями или с одной лишь отличной от нуля правой частью; в этом случае достаточно при выборе одной особой точки производить релаксацию один раз. Далее, метод является удобным также тогда, когда при выборе большего числа особых точек решаем ту же систему для нескольких грузовых состояний. В остальных случаях, когда надо решать несколько раз, метод может, но не должен быть экономным.

Предлагаемый метод позволяет для уточнения результатов произвести выравнение грузовых членов по ресидуам. Определенную часть окончательного значения переменного грузового члена принимаем также за ресидуум, величину которого определим из условия, чтобы загружение этим ресидуем совместно с остальными ресидуами обусловливало нулевое значение определенного неизвестного, чего достигнем при помощи заранее определенной или наугад полученной функции влияния этого неизвестного.

То обстоятельство, что решение можно провести таким образом, является простым следствием линейности системы уравнений и вытекает из вспомогательной теоремы линейной алгебры, в которой говорится, каким способом и при каких условиях найдем решение системы линейных уравнений для данных правых частей при помощи известных решений системы для различных других правых частей.

Summary

RELAXATION WITH VARIABLE LOAD TERM AND ITS APPLICATION TO THE SOLUTION OF PLATES AND TORSION PROBLEM

ZDENĚK P. BAŽANT

Relaxation with a variable load term is a generalisation of the usual relaxation method which considerably speeds up the relaxation process. This becomes most useful when the usual process is slow, as in the case with more complicated boundary conditions, or in a solution of a section of large symmetrical net when the diagonal coefficients of the system of linear equations are not appreciably larger than the others.

In the submitted method, not only the variables themselves are successively changed, as it is in the usual relaxation method, but also the right-hand sides of the equations, the so-called load terms. The process may be described thus: certain points are chosen in the net; in these points, the variable load terms are taken instead of the residues; these terms are then changed by a process formally identical as the residues. On choosing the step in the relaxation, the changes in these points may be ignored; thus residues can be quickly eliminated by transferring them to these points.

The net points at which the variable load terms act, assume the character of boundary points, and are called singular net points. They may be proper or improper: a proper singular point is exactly a point of the given net, and the changes of its load term are independent of the remaining ones; if an improper singular net point is used, the load terms of a group of net points are changed in such a manner that the ratio of their values remains constant (usually unity). Their variation is then determined by a single parameter, whose value we then asign to the improper singular net point of the group. Changes in the unknowns will then affect the residues at these points, but not the variable load terms.

A special aspect of this method is that really we solve a load case which is also an unknown one. Therefore the singular net points cannot be chosen arbitrarily, but in such a manner that the solution for the given right-hand sides may be obtained as a linear combination of the results obtained. Thus if r singular net points are used, the relaxation will have to be performed, in general $r + 1$ times, in special cases r times. The submitted method is most advantageous for solving a system with identical right-hand sides, or with only one non-zero right hand-side; the relaxation, with one singular point, will then have to be performed only once. The method is also useful when chosing more singular net points the same net must be solved for more load cases. In other cases it is necessary to perform the relaxation several times, and the method can but need not be quicker than the usual one.

To obtain more accurate results, the submitted method enables compensation of the load terms according to the residues. A part of the resulting value of the variable load term is then considered to be also a residue. Its magnitude is determined by the condition that the loading of the net by this residue together with the remaining residues annuls one fixed chosen unknown; and this may be performed using the influence area of this variable, determined approximately or only estimated.

The possibility of such a solution is a simple consequence of linearity of the system of equations and follows from the theorem of linear algebra stating how and under which conditions we determine from the known solutions of a fixed system of linear equations for different right-hand sides the solution for a given right-hand sides.